الرياضيات

للصف الأول العلمي

الفصل الدراسي الأول

طبعة ابتدائية

1437هـ


بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمدُ للهِ معزّ الإسلام بنصره، ومُذلّ الشركِ بقهره، ومصرّف الأمور بأمره، ومستدرجِ الكافرين بمكره، الذي قدّر الأيام دولاً بعدله، وجعل العاقبةَ للمتقينَ بفضلِه، والصلاةُ والسلام على من أعلى اللهُ منارَ الإسلام بسيفِه.

أما بعد:

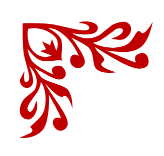
فإنه بفضل الله تعالى، وحسن توفيقه تدخل الدولة الإسلامية اليوم عهداً جديداً، وذلك من خلال وضعها اللبنة الأولى في صرح التعليم الإسلامي القائم على منهج الكتاب، وعلى هدي النبوّة وبفهم السلف الصالح والرعيل الأول لها، وبرؤيةٍ صافية لا شرقيّة ولا غربيّة، ولكن قرآنية نبوية بعيداً عن الأهواء والأباطيل وأضاليل دُعاة الاشتراكية الشرقيّة، أو الرأسمالية الغربيّة، أو سماسرة الأحزاب والمناهج المنحرفة في شتّى أصقاع الأرض، وبعدما تركت هذه الوافدات الكفرية وتلك الانحرافات البدعية أثرها الواضح في أبناء الأمة الإسلامية، نهضت دولة الخلافة -بتوفيق الله تعالى- بأعباء ردّهم إلى جادّة التوحيد الزاكية ورحبة الإسلام الواسعة تحت راية الخلافة الراشدة ودوحتها الوارفة بعدما اجتالتهم الشياطين عنها إلى وهدات الجاهلية وشعابها المهلكة.

وهي اليوم إذ تُقدم على هذه الخطوة من خلال منهجها الجديد والذي لم تدخر وسعاً في اتّباع خطى السلف الصالح في إعداده، حرصاً منها على أن يأتي موافقاً للكتاب والسنة مستمداً مادته منهما لا يحيد عنهما ولا يعدل بهما، في زمن كثُرَ فيه تحريف المنحرفين، وتزييف المبطلين، وجفاء المعطلين، وغلوا الغالين.

ولقد كانت كتابة هذه المناهج خطوة على الطريق ولبنة من لبنات بناء صرح الخلافة وهذا الذي كُتِب هو جهد المُقِل فإن أصبنا فمن الله وإن اخطأنا فمنا ومن الشيطان والله ورسوله منه بريء ونحن نقبل نصيحة وتسديد كل محِب وكما قال الشاعِر:

وإن تجد عيباً فسُدَّ الخللا   قد جلَّ من لا عيب فيه وعلا

(وآخر دعوانا أن الحمد لله ربِّ العالمين)

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمـد لله، والصلاة والسلام على رسول الله، وعلى آله وصحبه ومن والآه وبعد

بعد توفيق الله عزَ وجل تم إعداد هذا العمل المتواضع
(**كتاب الرياضيات للصف الأوّل العلمي**)
حيثُ يتألف هذا الكتاب من فصلين دراسيين،
ويتضمن الفصل الدراسي الأوّل من:
الوحدة الأول الأسس واللوغاريتمات
الوحدة الثانية المتتابعات ومفكوك ذي الحدين
الوحدة الثالثة موضوع المثلثات
الوحدة الرابعة تختص بموضوع الدالة والغاية والاستمرارية
الوحدة الخامس بموضوع المشتقة
ولقد راعينا أسلوب التدرج في عرض المادة العلميّة ومطعمة بالتطبيقات العمليّة

ونسأل الله تعالى أن يوفق اخواننا المدرسين في توصيل المادة العلمية بصورة صحيحة لطلبتنا الأعزاء.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين وصلى الله وسلم على نبينا محمد وآله وصحبة أجمعين.




المحتويات

الوحدة الأولى

الأسس والجذور واللوغاريتمات

الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الأولى أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يسهل مقادير جبرية باستخدام قواعد الأسس
2) يسهل عمليات جبرية باستخدام قواعد الجذور
3) يطبق قواعد اللوغاريتم في حل معادلات أسية وتسهيل عمليات حسابية
4) يستخدم اللوغاريتمات في التطبيقات العملية

مفردات الوحدة الأولى

[1 – 1] الأسس والجذور

[2 – 1] اللوغاريتمات الاعتيادية

[3 – 1] اللوغاريتمات العشرية

[4 – 1] تطبيقات عملية على اللوغاريتمات العشرية

[5 – 1] اللوغاريتم الطبيعي

الرموز والعلاقات

المصطلح	الرمز
دالة اللوغاريتم	$y = \log_a x$
دالة اللوغاريتم العشري	$y = \log x$
دالة اللوغاريتم الطبيعي	$y = \ln x$

[1-1] الأسس والجذور

الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يذكر قواعد الأسس والجذور

الأسس

أولاً) الأسس الصحيحة

إذا كانت x عدد حقيقي، m عدد صحيح، n عدد صحيح فأنه يمكن استخدام التعريف الآتي:

$$x^n = x.x.x \dots$$

إلى n من المرات

يسمى x أساس القوة ، n تسمى الأس

كما يمكن وضع قوانين الأسس الآتية والتي يمكن استنتاجها من التعريف السابق

إذا كان x, y عدد ين حقيقيين n, m عددين صحيحين ومع مراعاة استثناء الحالات التي يكون فيها المقام = 0، والحالات التي يكون فيها الأساس = 0، الأس = 0 معاً فإن

1) $x^n . x^m = x^{n+m}$

2) $(x^n)^m = x^{n.m}$

3) $(x.y)^n = x^n . y^n$

4) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

إذا كانت $x \neq 0$

$$5)\quad \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} x^{n-m} & \text{إذا كانت } n > m \\ x^0 = 1 & \text{إذا كانت } n = m \\ \dfrac{1}{x^{n-m}} & \text{إذا كانت } n < m \end{cases}$$



ملاحظات

$1)\quad x^0 = 1$

$2)\quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

ثانياً) الأسس الكسرية

إذا كانت x عدداً حقيقيا موجباً:

1) وكانت $n > 1$ ، nعدد صحيح فإن:

– حيث n تسمى بدليل الجذر

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

2) وكانت n , m أعداد صحيحة فإن:

$n \in Z^{+}$ لكل $x>0$, $m \in Z$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$



ملاحظات

$1)\quad \sqrt[n]{x.y} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y}$

$2)\quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$

$3)\quad \sqrt[n]{x^{-m}} = x^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$

4) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{x^m}} = \sqrt[nk]{x^m}$

5) $x = \sqrt{x}.\sqrt{x}$

6) $\sqrt[n]{x \pm y} \neq \sqrt[n]{x} \pm \sqrt[n]{y}$

مثال1

بسط المقادير الآتية:

1) $\frac{27^{2n+1} \times 16^{n-1}}{9^{3n+1} \times 4^{2n-1}}$

2) $\frac{1}{x^{a-b}+1} + \frac{1}{x^{b-a}+1}$

3) $(10^{-3} \times 0.001 + 10^{-5} \times 0.3)^2$

4) $\sqrt{1.6 \times 10^{-5} + 9 \times 10^{-6}}$

الحل:

1) $\frac{27^{2n+1} \times 16^{n-1}}{9^{3n+1} \times 4^{2n-1}} = \frac{(3^3)^{2n+1} \times (2^4)^{n-1}}{(3^2)^{3n+1} \times (2^2)^{2n-1}}$

$= \frac{3^{6n+3} \times 2^{4n-4}}{3^{6n+2} \times 2^{4n-2}}$

$= 3^{6n+3-6n-2} \times 2^{4n-4n-4+2}$

$= 3 \times 2^{-2} = \frac{3}{4}$

2) $$\frac{1}{x^{a-b}+1}+\frac{1}{x^{b-a}+1}=\frac{x^{b-a}+1+x^{a-b}+1}{(x^{b-a}+1)(x^{a-b}+1)}$$

$$=\frac{x^{b-a}+1+x^{a-b}+1}{x^{a-b+b-a}+x^{a-b}+x^{b-a}+1}$$

$$=\frac{x^{b-a}+x^{a-b}+2}{x^{0}+x^{a-b}+x^{b-a}+1}$$

$$=\frac{x^{b-a}+x^{a-b}+2}{x^{b-a}+x^{a-b}+2}=1$$

3) $$\left(10^{-3}\times 0.001+10^{-5}\times 0.3\right)^{2}$$

$$=\left(10^{-5}\times 0.1+10^{-5}\times 0.3\right)^{2}$$

$$=\left(10^{-5}\times 0.4\right)^{2}=\left(10^{-5}\right)^{2}\times(0.4)^{2}$$

$$=0.16\times 10^{-10}$$

4) $$\sqrt{1.6\times 10^{-5}+9\times 10^{-6}}$$

$$=\sqrt{16\times 10^{-6}+9\times 10^{-6}}=\sqrt{(16+9)\times 10^{-6}}$$

$$=\sqrt{25\times 10^{-6}}=5\times 10^{-3}$$

مثال 2

حل المعادلات الآتية:

1) $9^{2x-3} = 27^x$

2) $(x+1)^3 = 125$

3) $\sqrt[5]{(x-2)^3} = 8$

الحل

1) $9^{2x-3} = 27^x = 3^{2(2x-3)} = 3^{3x} \rightarrow 3^{4x-6} = 3^{3x}$

إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس بشرط أن لا يكون المقام منتمياً للمجموعة $\{1,0,-1\}$

$4x - 6 = 3x \rightarrow 4x - 3x = 6 \rightarrow x = 6$

2) $(x+1)^3 = 125$

$(x+1)^3 = 5^3$

$x + 1 = 5 \rightarrow x = 4$

إذا تساوت الأسس تساوت الأساسات بشرط إذا كان الأس فردي أما إذا كان الأس زوجي فإن:

الأساس = ± الأساس الآخر

3) $\sqrt[5]{(x-2)^3} = 8$

$(x-2)^{\frac{3}{5}} = 2^3$

برفع الطرفين للاس $\frac{5}{3}$

$(x-2) = (2^3)^{\frac{5}{3}} \rightarrow x - 2 = 2^5 \rightarrow x - 2 = 32$

$x = 34$

تمارين(1-1)

س1) بسط كلا ممّا يأتي :

1) $(\frac{2x^2}{3y^3})^3(\frac{y^3}{x^3})^2(\frac{x}{2y})^4$

2) $(x^{2n-1})^2(x^{n-1})^2$

3) $\sqrt[3]{\frac{8x^4.y^3}{27xy^6}}$

س2) حل المعادلات الآتية:

1) $2^x = 4^{x+1}$

2) $5^{x^2-5x} = \frac{1}{625}$

3) $5 \times 10^{-11}x^2 - 3 \times 10^{-16} = 0.002x^2$

4) $\sqrt[3]{(x+1)^5} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$

[2-1] اللوغاريتم

الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
1) يعرف اللوغاريتم
2) يستخدم قواعد اللوغاريتم

إذا كانت الدالة الاسية بالصيغة

$y = a^x$

والتي مجالها $R \to R^+$

فتوجد دالة عكسية لها مجالها $R^+ \to R$ تسمى

الدالة اللوغاريتمية وتكون بالصيغة : $\log_a y = x$

الصيغة الأسية والصيغة اللوغاريتمية

الصيغة الأسية $y = a^x \Leftrightarrow$ الصيغة اللوغاريتمية: $\log_a y = x$

بشرط $a \in R^+\{1\}, y > R^+, x \in R$

مثال 3

حول الصيغ الأسية الآتية إلى الصيغ اللوغاريتمية

1) $8 = 2^3$
2) $16 = 2^4$
3) $0{,}0001 = 10^{-4}$

الحل

1) الصيغة الأسية $8 = 2^3$

الصيغة اللوغاريتمية $\log_2 8 = 3$

2) الصيغة الأسية: $16 = 2^4$

الصيغة اللوغاريتمية: $\log_2 16 = 4$

3) الصيغة الاسية: $0,0001 = 10^{-4}$

الصيغة اللوغاريتمية: $\log_{10} 0.0001 = -4$

مثال 4

حول الصيغ اللوغاريتمية الآتية إلى الصيغ الأسية

1) $\log_2 64 = 6$

2) $\log_{10} 0.01 = -2$

الحل

1) الصيغة اللوغاريتمية: $\log_2 64 = 6$

الصيغة الاسية $64 = 2^6$

2) الصيغة اللوغاريتمية: $\log_{10} 0.01 = -2$

الصيغة الاسية $0,01 = 10^{-2}$

مثال 5

جد قيمة x من المعادلة اللوغاريتمية: $\log_2(x+1)=3$

الحل: نحول الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية:

$(x+1)=2^3 \rightarrow x+1=8 \rightarrow x=7$

مثال 6

حل المعادلة: $\log_2(x^2-4)=5$

الحل: $x^2-4=2^5$

$x^2=36 \rightarrow x=\mp 6$

مثال 7

حل المعادلة: $\log_x 0.0003=5$

الحل: $x^5=0.00032 \rightarrow x^5=(0.2)^5 \rightarrow x=0.2$

مثال 8

حل المعادلة: $\log_5 \frac{1}{625}= x^2-20$

الحل:

$5^{x^2-20}=\frac{1}{625}$

$5^{x^2-20}=5^{-4}$

$x^2-20=-4 \rightarrow x^2=16 \rightarrow x=\pm 4$

خواص الدالة اللوغارتيمية $y = \log_a x$

1) لكل عدد حقيقي موجب له لوغارتيم

2) العدد الحقيقي السالب ليس له لوغارتيم

3) الأساس $a \in R^+ - \{1\}$ ، $a > 0$، لكل $x \in R , y \in R^+$

قواعد اللوغاريتمات

1) $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3) $n\log_a x = \log_a x^n \qquad \forall\, n \in R$

4) $\log_a 1 = 0$

5) $\log_a a = 1$ لأي اساس

مثال 9

جد ناتج المقدار:

$$\log_3 \frac{31}{3} + \log_3 \frac{12}{62} - \log_3 54$$

الحل:

$$\log_3 \frac{31}{3} \cdot \frac{12}{62} \div 54 = \log_3 \frac{2}{54}$$

$$= \log_3 \frac{1}{3^3} = \log_3 3^{-3} = -3 \log_3 3 = -3(1) = -3$$

مثال 10

جد ناتج المقدار

$$\log_3 81 + \log_5 625 - \log_2 64 + \log_4 216$$

الحل: يتعذر تطبيق قاعدة الجمع والطرح بسبب اختلاف الأساسات

لذا نلجأ إلى تحليل الاعداد:

$$\log_3 3^4 + \log_5 5^4 - \log_2 2^6 + \log_4 4^4$$

$$= 4\log_3 3 + 4 \log_5 5 - 6 \log_2 2 + 4 \log_4 4$$

$$= 4 \times 1 + 4 \times 1 - 6 \times 1 + 4 \times 1 = 6$$

مثال 11

حل المعادلة: $\log_2(x-1)^2 + \log_2(x+2) = 1$

الحل:

$\log_2(x-1)^2\ (x+2) = 1$

$(x-1)^2(x+2) = 2^1$

$(x^2-2x+1)(x+2) = 2$

$x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 - 2 = 0$

$x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2-3) = 0$

أما $x = 0$ ، أو $x^2 = 3 \rightarrow \ \mathrm{x} = \mp\sqrt{3}$

مثال 12

حل المعادلة: $\log_{\sqrt{3}}(2x+1) + \log_{\sqrt{3}}(x-2) = 2$

الحل:

$\log_{\sqrt{3}}(2x+1)(x-2) = 2$

$(2x+1)(x-2) = (\sqrt{3})^2$

$2x^2 - 4x + x - 2 = 3$

$2x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow (x+1)(2x-5) = 0$

أما $x = \frac{5}{2}$ ، أو $x = -1$

مثال 13

جد قيمة x : $\log_2 \frac{(x-1)}{2x} \times 2x^2 \div \frac{x}{x+1} = 1$

الحل:

$$\log_2 \frac{x-1}{2x} \times 2x^2 \times \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\log_2(x^2-1) = 1 \quad \rightarrow x^2 - 1 = 2 \rightarrow x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

مثال 14

جد قيمة x للمعادلة: $\log_3 9^x - \log_3 3^{x-1} = 1$

الحل:

$$\log_3 9^x \div 3^{x-1} = 1$$

$$\log_3 3^{2x} \div 3^{x-1} = 1$$

$$\log_3 3^{2x-x+1} = 1 \rightarrow 3^{x+1} = 3 \rightarrow x+1 = 1 \rightarrow x = 0$$

نشاط

جد ناتج المقدار: $\log_2(\sqrt{3}-1)^2 + \log_2(\sqrt{3}+2)$

[3-1] اللوغارتيم العشرية



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
يعرف اللوغارتيم العشري

هي اللوغاريتمات التي أساسها 10

وقد أتفق على عدم كتابة الأساس (10)

ولها نفس قواعد اللوغاريتمات الاعتيادية

ملاحظة $\log 10 = 1$

مثال 15

جد ناتج كلاً ممّا يأتي:

1) $\log 1000$ 2) $\log 0.0001$

الحل:

1) $\log 10^3 = 3\log 10 = 3 \times 1 = 3$

2) $\log 10^{-4} = -4\log 10 = -4 \times 1 = -4$

مثال 16

جد ناتج: $\log 0.03 + \log 0.6 - \log 0.0018$

الحل:

$\log 0.03 \times 0.6 \div 0.0018$

$$\log \frac{0.03 \times 0.6}{0.0018} = \log \frac{0.018}{0.0018} = \log 10 = 1$$

مثال 17

إذا كان $\log 2 = 0.3010 \; , \log 3 = 0.4771$

جد ناتج كلاً ممّا يأتي:

1) $\log 5$ 2) $\log 200$ 3) $\log 0.003$

4) $\log 6$ 5) $\log 24$

الحل:

1) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$

$= 1 - 0.3010 = 0.69810$

2) $\log 200 = \log 100 \times 2 = \log 100 + \log 2$

$= 2 + 0.3010 = 2.3010$

3) $\log 0.003 = \log \frac{3}{1000} = \log 3 - \log 1000$

$= 0.4771 + (-3) = 2.5229$

4) $\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 3 + \log 2$

$= 0.4771 + 0.3010 = 0.7781$

5) $\log 24 = \log 8 \times 3 = \log 2^3 + \log 3$

$= 3 \log 2 + \log 3 = 3(0.3010) + 0.4771$

$= 1.3801$

مثال 18

إذا كان $\log 2 = 0.3$ ، $\log 3 = 0.4$

جد ناتج حل المعادلة: $2^{2x-1} = 3^{x+5}$

الحل: بأخذ اللوغارتيم للطرفين

$$\log 2^{2x-1} = \log 3^{x+5}$$

$$(2x-1)\log 2 \quad (x+5)\log 3$$

$$= (x+5)\ \log 3 = (2x-1) \times 0.3$$

$$= (x+5)0.4 = 0.6x - 0.3$$

$$= 0.4x + 2 \rightarrow 0.2x = 2.3$$

$$x = 11.5$$

نشاط

أثبت أن:

$$\log 2\ \log \frac{16}{15} + \log \frac{25}{27} + \log \frac{81}{80} - \log 0.25 - 2\log 3 = 0$$

[1 − 4] اللوغارتيم الطبيعي

الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادرا على أن:
1) يعرف اللوغاريتم الطبيعي
2) يذكر خواص اللوغاريتم الطبيعي

درسنا الدوال الآتية

دالة اللوغارتيم الذي أساسه $a \in R^+ - \{1\}, x \in R, y \in R^+$

$$y = a^x \quad \leftrightarrow \quad \log_a y = x$$

ودالة اللوغارتيم العشري: $y = 10^x \Leftrightarrow \log y = x$

والان ندرس دالة اللوغارتيم الطبيعي: $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$

اللوغارتيم الطبيعي رمزه (ln):

وهو لوغارتيم أساسه العدد e = 2.71828182

ملاحظات:

1) $\ln e = 1$

2) $e^{\ln x} = x$

3) $\ln e^x = x$

مثال19

جد ناتج كلاً ممّا يأتي

$1)\ \ln 3+\ln 5+\ln 2-\ln 30$

$2)\ \ln(x-1)+\ln(x^2+x)-\ln x=\ln 8$

$3)\ e^{\ln(x-1)}=3$

$4)\ \ln\frac{1}{2x}-\ln\frac{e^x}{2x}=1+2x$

الحل:

$1)\ \ln 3+\ln 5+\ln 2-\ln 30$

$\ln 3\times 5\times 2\div 30=\ln 1=0$

$2)\ \ln(x-1)+\ln(x^2+x)-\ln x=\ln 8$

$\ln(x-1)(x^2+x)\div x=\ln 8$

$\rightarrow \ln\frac{(x-1)(x+1)x}{x}=\ln 8$

$\rightarrow \ln(x-1)(x+1)=\ln 8$

$\rightarrow \ln(x^2-1)=\ln 8\rightarrow x^2-1=8$

$\rightarrow x^2=9\rightarrow x=\mp 3$

$3)\ e^{\ln(x-1)}=3\rightarrow (x-1)=3\rightarrow x=4$

$4)\ \ln\frac{1}{2x}-\ln\frac{e^x}{2x}=1+2x$

$$\ln\frac{1}{2x} \div \frac{e^x}{2x} = 1 + 2x$$

$$\ln\frac{1}{2x} \times \frac{2x}{e^x} = 1 + 2x \;\rightarrow\; \ln e^{-x} = 2x + 1$$

$$-x = 2x + 1 \;\rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

تمارين(1-2)

استفد $\log 3 = 0.4$ ، $\log 2 = 0.3$

س[1] جد ناتج كلاً ممّا يأتي:

1) $3\log 10 - 2\log 5$

2) $\log\frac{21}{4} - \log\frac{7}{2} + \log\frac{8}{9} + \log 0.75$

3) $3\log 12 - 4\log 9 + \log\frac{81}{64} - \log 3$

س[2] حل كلاً من المعادلات الآتية:

1) $\log(x+6) - \log x = \log(x-4)$

2) $\log x^2 = 2$

3) $6^{2x-1} = 2$ علما انه $\log 2 = 0.3$

س[3] اثبت أن:

1) $\log\frac{x^2}{yz} + \log\frac{y^2}{xz} + \log\frac{z^2}{zx} = 0$

2) $\ln(x^2 - 2x) - \ln x + \ln e^{-\ln(x+2)} = 0$

الوحدة الثانية

◈المتتابعات

◈نظرية ذات الحدين



الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الثانية أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يجد حدود متتابعة حسابية أو هندسية
2) يجد مجموع متتابعة حسابية أو هندسية
3) يفك حدين باستخدام نظرية ذات الحدين

مفردات الوحدة الثانية

[2 – 1] المتتابعة

[2 – 2] المتتابعة الحسابية

[2 – 3] المتتابعة الهندسية

[2 – 4] المضروب والتباديل والتوافيق

[2 – 5] نظرية ذات الحدين

الرمز والعلاقة الرياضية	المصطلح
$U_n=a+(n-1)d$	الحد العام للمتتابعة الحسابية
$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ $S_n=\frac{n}{2}[a+Un]$	مجموع حدود متتابعة الحسابية
$U_n=ar^{n-1}$	الحد العام للمتتابعة الهندسية
$S_n=\frac{a[1-r^n]}{1-r}$	مجموع حدود متتابعة هندسية

[1-2] المتتابعة



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يعرف المتتابعة

المتتابعة

عبارة عن أعداد متتالية مرتبة حسب نظام معين على شكل حدود بينهما فواصل.

طرق كتابة المتتابعة

1) طريقة السرد: وذلك بسرد الحدود تباعاً.

مثال

المتتابعة < 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، .... >

حدها الأول هو 1 ، وحدها الثاني هو 2 ، وحدها الثالث هو 3 وهكذا

2) طريقة الوصف: وذلك بوصف الحد العام (الحد النوني)

مثال

جد الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $U_n=3_n+2$

<u>الحل</u>

الحد الأول $n=1 \rightarrow U_1=3(1)+2=5$

الحد الثاني $n=2 \rightarrow U_2=3(2)+2=8$

الحد الثالث $n=3 \rightarrow U_3=3(3)+2=11$

الحد الرابع $n=4 \rightarrow U_4=3(4)+2=14$

الحد الخامس $n=5 \rightarrow U_5=3(5)+2=17$

< 5 ، 8 ، 11 ، 14 ،17 >

[2 – 2] المتتابعة الحسابية

هي متتابعة من الاعداد كل حد من حدودها يزيد أو ينقص عن الحد الذي قبله زيادة (نقصان) بنسبة ثابتة وتسمى هذه الزيادة (النقصان) بالأساس ويرمز له بالرمز (d)

الحد النوني للمتتابعة الحسابية

$$U_n=a+(n-1)d$$

$\forall\ n > 0 \quad , \quad n \in N$

حيث أن a الحد الأول ، $d = U_{n+1}-U_n$ الأساس

مجموع n من الحدود ابتداءاً من الحد الأول في متوالية حسابية والذي نرمز له بالرمز S_n

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

مجموع n من الحدود ابتداءاً من الحد الأول في متوالية حسابية والذي نرمز له بالرمز S_n

$$S_n=\frac{n}{2}[a+Un]$$

حيث a الحد الأول ، U_n الحد الأخير

مثال3

متتابعة حسابية > 1 ، 4 ، 7 ،......... <

جد حدها العاشر وكذلك مجموع أول عشرين حد

الحل

$a=1$

$d= U_2 - U_1 = 4-1=3 \quad , n = 10$

$U_n = a+(n-1)d$

الحد العاشر $U_{10} = 1+(10-1)\times 3 = 28$

لإيجاد مجموع أول 20 حد :

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$S_n = \frac{20}{2}[2\times 1+(20-1)\times 3] = 590$

مثال4

جد مجموع حدود المتتابعة الحسابية > 4 ، 6 ، 8 ، ...... ،56 <

الحل

$a = 4 \qquad U_n = 56 \qquad d = 6-4 = 2$

نجد عدد الحدود n:

$U_n = a+(n-1)d$

$56 = 4+(n-1)\times 2 \rightarrow 56 = 4+2n-2 \rightarrow 56 = 2+2n$

$\rightarrow 2n = 54 \rightarrow n = 27$

$S_n = \frac{n}{2}[a+Un]$

$S_n = \frac{27}{2}[4+56] \rightarrow S_n = \frac{27}{2}[60] \rightarrow S_n = 810$

مثال5

متتابعة حسابية حدها الثالث هو 8 وحدها السابع هو 20

أوجد الحد الحادي عشر

الحل

$U_n=a+(n-1)d$

$U_3=a+(3-1)d \rightarrow 8 = a + 2d$ ....(1)

$U_7=a+(7-1)d \rightarrow 20= a + 6d$ ....(2)

$a = 8 - 2d$ من معادلة (1)

$20= (8 - 2d) + 6d$ عوض في معادلة (2)

$20 - 8 = - 2d + 6d \rightarrow 4d = 12 \rightarrow d = 3$

$a = 8 - 2(3) = 2$ عوض في معادلة(1)

$U_{11}=2+(11-1)3 \rightarrow U_{11}=32$

مثال6

أدخل 7 أوساط حسابية بين العددين 15 ، −9

الحل

<-9 ، ، ، ، ، ، ، ، $15>$

$n = 7 + 2 = 9$ عدد الحدود

$U_n=a+(n-1)d$

$U_9=a+(9-1)d \rightarrow -9 = 15 + 8d \rightarrow 8d = -24$

$\rightarrow d= -3$

< -9 ، -6 ، -3 ، 0 ، 3 ، 6 ، 9 ، 12 ، $15 >$

الأوساط الحسابية

مثال7

في إحدى المدارس في ولاية حلب ، قرر مدرس مادة الرياضيات أختبار عدد من الطلاب بحيث يختبر في اليوم الأول 7 طلاب ، وفي اليوم الثاني يختبر9 طلاب ، وفي اليوم الثالث 11 طالبا وهكذا بتتابع حسابي ، فإذا كان عدد الطلاب 91 طالب فكم يوما يستغرق الامتحان حتى ينهي جميع الطلاب.

الحل

$a = 7 \quad , \quad d = 9 - 7 = 2 \quad , \quad S_n = 91 \quad , \quad n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$91 = \frac{n}{2}[2(7) + (n-1)2]$$ نضرب الطرفين × 2

$$182 = n[14 + 2n - 2]$$

$$182 = [2n^2 + 14n - 2n]$$ نقسم الطرفين على 2

$$n^2 + 6n - 91 = 0 \quad \rightarrow \quad (n+13)(n-7) = 0$$

$n = -13$ يهمل $\qquad n = 7$ (سبعة أيام)

[3 – 2]المتتابعة الهندسية

هي متتابعة من الأعداد كل حد من حدودها يمكن الحصول عليه بضرب الحد الذي قبله بعدد ثابت يسمى الأساس ويرمز له بالرمز (r)

الحد النوني في المتتابعة الهندسية

$$U_n = ar^{n-1}$$

حيث a الحد الأول ، n عدد الحدود ، r الأساس = $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

مجموع أول ن حد في متتابعة هندسية

$$S_n = \frac{a[1-r^n]}{1-r}$$

$r \neq 1$

مجموع أول n حد في متتابعة هندسية لم يعلم حدها الأخير

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$

$|r| < 1$

مثال 8

أوجد الحد الثامن في المتتابعة الهندسية < 4 ، 8 ، 16 ، ...... >
كذلك مجموع أول سبعة حدود.

الحل

$a = 4 \quad , \quad r = \frac{8}{4} = 2$

$U_n = ar^{n-1}$

$U_8 = 4\times 2^{8-1} = 512$

$S_n = \frac{a[1-r^n]}{1-r}$

$S_7 = \frac{4[1-2^7]}{1-2} \quad \rightarrow \quad S_7 = 508$

مثال 9

متتابعة هندسية حدها الثالث يساوي 8 ، وحدها السابع يساوي 128 جد حدها الأول وأساسها ، علما أن جميع حدودها موجبة.

الحل

$U_n = ar^{n-1}$

$U_3 = ar^{3-1} \quad \rightarrow 8 = ar^2 \quad .... (1)$

$U_7 = ar^{7-1} \quad \rightarrow 128 = ar^6 \quad .... (2)$

نقسم معادلة (2) على معادلة (1)

$\frac{8}{128} = \frac{ar^2}{ar^6} \quad \rightarrow \quad r^4 = 16$

$\rightarrow \quad r = 2$

$8 = ar^2 \quad \rightarrow \quad 8 = a\, 2^2$

$\rightarrow \quad a = 2$

تمارين(2−1)

س1) جد الحدود السبعة في المتتابعة $< 2^n >$

س2) متتابعة < 2، 6 ، 10 ، …… > بين نوعها ثم جد الحد العشرون وكذلك مجموع أول عشرين حد .

س3) متتابعة حسابية حدها الرابع هو 8 وحدها العاشر هو 20 ، أوجد الحد العشرون وكذلك مجموع أول عشرون حدود.

س4) متتابعة هندسية حدها الأول هو 1 وحدها الرابع هو 64 ، جد الحد السابع ومجموع 8 حدود الأولى.

س5) أدخل 6 أوساط هندسية بين العددين 2 ، 256 .

س6) متتابعة حسابية <a , b+5 , 2b+2 , 17> جد قيمة a , b .

س7) متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني والثالث هو 12 ومجموع حديها الخامس والسادس هو 96 جد حدها الأول واساسها .

س8) كم حدا يؤخذ من المتتابعة < 13، 11 ، 9 ، 7 ،.... > ليكون المجموع 45 .

(2-4) المضروب والتباديل والتوافيق

سوف نتطرق لهذا الموضوع بإختصار شديد ونعرض شرح مبسط للقوانين التي سوف نحتاجها في موضوع مفكوك ذي الحدين

الهدف من الدرس : أن يكون الطالب قادرا على أن يجد مفكوك ذات الحدين

1) المضروب يرمز له بالرمز (n!)

$n!=n(n-1)(n-2)(n-3)\text{.........}\times 1$

حيث n عدد طبيعي ، $0 \leq n$

فمثلاً:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$0!=1$

$1!=1$

2) التباديل P(n , r)

طريقة لإختيار r من n مع مراعاة الترتيب

$P(n, r) = n(n-1)(n-2)(n-3)\text{.........}\times(n-r+1)$

فمثلاً

a) $P(10, 2) = 10 \times 9 = 90$

b) $P(10, 3) = 10 \times 9 \times 8 = 720$

c) $P(6, 5) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

d) $P(7, 1) = 7$

ملاحظة

$P(n , n) = n!$

فمثلاً

$P(5 , 5) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$P(9 , 0) = 1$

3) التوافيق يرمز له بالرمز $C(n , r)$ أو $\binom{n}{r}$

طريقة لإختيار r من n بدون مراعاة الترتيب

$$C(n , r) = \frac{P(n , r)}{r!}$$

1) $C(5 , 3) = \frac{P(5 , 3)}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

2) $C(10 , 6) = \frac{P(5 , 6)}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

ملاحظة

$C(n , n) = 1$

$C(n , 0) = 1$

$C(n , r) = C(n , n-r)$

فمثلا

$C(9 , 9) = 1$

$C(4 , 0) = 1$

$C(100 , 98) = C(100 , 100-98) = \frac{p\binom{100}{2}}{2} = \frac{100 \times 99}{2 \times 1}$

$= 4950$

[5 – 2] قانون الحد العام في نظرية ذات الحدين



$$P_r = C^n_{r-1} \times a^{n-r+1} \times b^{r-1}$$

1) عدد حدود المقدار $(x + y)^n$ هو $n+1$ من الحدود

2) مجموع أسس x و y هو n في كل حد

$$(x+y)^n =$$
$$c\binom{n}{0}x^n + c\binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + c\binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + c\binom{n}{n}y^n$$

مثال8

جد الحد الخامس في مفكوك $(x + y)^7$

الحل

$r = 5 \quad , \quad a = x \quad , \quad b = y \quad , \quad n = 7$

$$P_r = C^n_{r-1} \cdot a^{n-r+1} \cdot b^{r-1}$$

$$P_5 = C^7_{5-1} \cdot x^{7-5+1} \cdot y^{5-1}$$

$$P_5 = C^7_4 \cdot x^3 \cdot y^4$$

$$P_5 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\ x^3\ y^4 \quad = \quad 35\ x^3\ y^4$$

ملاحظة

لإيجاد الحد الأوسط في مفكوك ذي الحدين يعتمد على قيمة n فإذا كانت

1) n عدد زوجي هناك حد أوسط واحد رتبته هي $r = \frac{n+2}{2}$

2) اما إذا كان n عدد فردي فهناك حدان أوسطيان

الحد الأوسط الأول $r = \frac{n+1}{2}$

الحد الأوسط الثاني هو الحد الذي يلي الحد الأوسط الأول

مثال9

جد الحد الوسط في مفكوك $(3x + 2y)^6$

الحل

رتبة الحد الوسط $r = \frac{n+2}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$

$r = 4 \quad , \quad a = 3X \quad , \quad b = 2Y \quad , \quad n = 6$

$$P_r = C^{n}_{r-1} \times a^{n-r+1} \times b^{r-1}$$

$$P_4 = C^{6}_{4-1} \times (3X)^{6-4+1} \times (2Y)^{4-1} = K^{6}_{3} \times 3^3\ X^3 \times\ 2^3\ y^3$$

$$P_4 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times 27X^3 \times 8Y^3 = 4320\ X^3\ y^3$$

مثال10

جد الحدين الأوسطين في مفكوك $(X + 3)^7$

الحل

$$r = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$r = 4$, $a = x$, $b = 3$, $n = 11$

$$P_r = C^n_{r-1} \times a^{n-r+1} \times b^{r-1}$$

الحد الأوسط الاول

$$P_4 = C^7_{4-1} \times X^{7-4+1} \times 3^{4-1}$$

$$P_4 = C^7_3 \times X^4 \times 3^3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \times X^4 \times 3^3$$

$$P_4 = 945\ X^4$$

الحد الأوسط الثاني

$$P_5 = C^7_4 \times X^3 \times 3^4$$

$$P_5 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} \times X^3 \times 3^4$$

$$P_5 = 2835\ X^3$$

مثال 11

جد مفكوك $(x + y)^5$

الحل

عدد الحدود $n + 1 = 5+1 = 6$

نستخدم قانون الحد العام

قانون الحد العام في نظرية ذات الحدين

$$P_r = C^n_{r-1} \times a^{n-r+1} \times b^{r-1}$$

الحد الأول $r = 1$

$$P_1 = C^5_{1-1} \times x^{5-1+1} \times y^{1-1} = C^5_0 \times x^5 = x^5$$

الحد الثاني $r = 2$

$$P_2 = C^5_{2-1} \times x^{5-2+1} \times y^{2-1} = C^5_1 \times x^4 \times y = 5\,x^4\,y$$

الحد الثالث $r = 3$

$$P_3 = C^5_{3-1} \times x^{5-3+1} \times y^{3-1} = C^5_2 \times x^3 \times y^2 = 10\,x^3\,y^2$$

الحد الرابع $r = 4$

$$P_4 = C^5_{4-1} \times x^{5-4+1} \times y^{4-1} = C^5_3 \times x^2 \times y^3 = 10\,x^2\,y^3$$

الحد الخامس $r = 5$

$$P_5 = C^5_{5-1} \times x^{5-5+1} \times y^{5-1} = C^5_4 \times x \times y^4 = 5\,x\,y^4$$

الحد السادس $r = 6$

$$P_6 = C^5_{6-1} \times x^{5-6+1} \times y^{6-1} = C^5_5 \times x^0 \times y^5 = y^5$$

$$(x + y)^5 = x^5 + 5\,x^4\,y + 10\,x^3\,y^2 + 10\,x^2\,y^3 + 5\,x\,y^4 + y^5$$

تمارين(2-2)

س1) جد مفكوك $(2y + 3)^7$

س2) جد مفكوك $(x - 3)^8$

س3) جد الحد الأوسط في مفكوك $(x + \frac{1}{x})^{10}$

س4) جد الحدين الأوسطين في مفكوك $(x + y^2)^7$

س5) جد الحد العاشر في مفكوك $(a + 2b)^{12}$

س6) جد معامل x في مفكوك $(x + 2)^{15}$

س7) جد ناتج $(101)^7$ باستخدام نظرية ذات الحدين

الوحدة الثالثة

المثلثات



الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الثالثة أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يعرف الدوال المثلثية
2) يجد قيم الدوال المثلثية
3) يرسم الدوال المثلثية
4) يحل معادلات مثلثية

مفردات الوحدة الثالثة

[1 – 3] الزاوية بالوضع القياسي (الزاوية المركزية)

[2 – 3] القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا

[3 – 3] الدوال الدائرية

[4 – 3] تطبيقات عملية على الدوال الدائرية

[5 – 3] الزوايا الخاصة ومواقع الزوايا الخاصة

[6 – 3] الإحداثيات القطبية

[7 – 3] رسم الدوال الدائرية

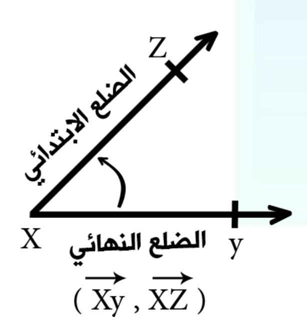
[8 – 3] المتطابقات المثلثية

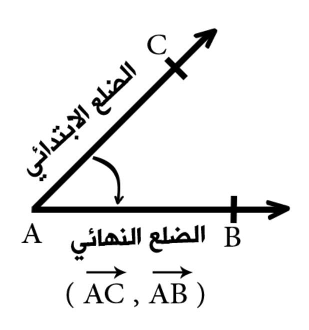
[9 – 3] المعادلات المثلثية

الرموز والعلاقات

المصطلح	الرمز بالإنكليزية
جيب الزاوية	$\sin\theta$
جيب تمام الزاوية	$\cos\theta$
ظل الزاوية	$\tan\theta$
ظل تمام الزاوية	$\cot\theta$
قاطع الزاوية	$\sec\theta$
قاطع تمام الزاوية	$\csc\theta$
التقدير الستيني	D°
التقدير الدائري	Q
النقطة المثلثية	$(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$

الزاوية الموجهة: عبارة عن زوج مرتب من شعاعين لهما نفس نقطة البداية ويسمى المسقط الأول بالضلع الابتدائي والمسقط الثاني بالضلع النهائي.



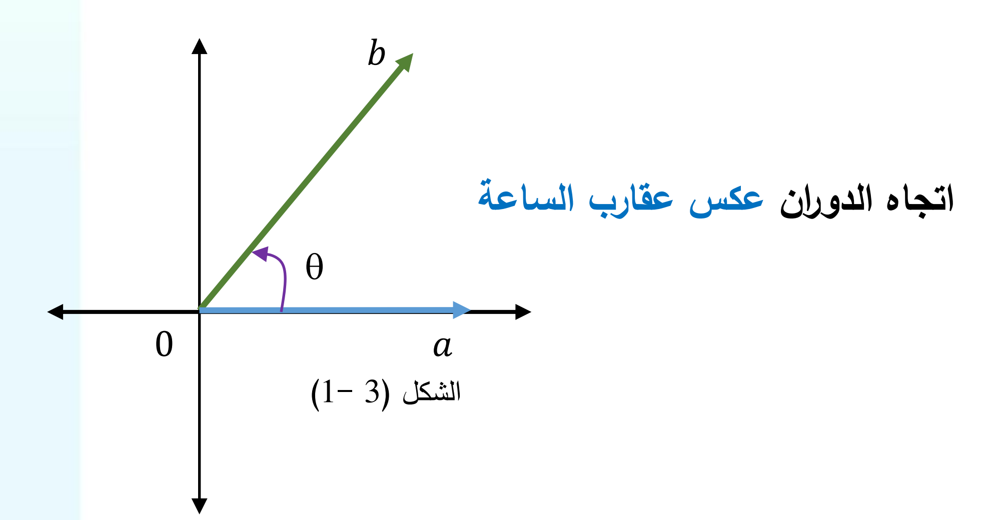


[3 -1] الزاوية الموجهة بالوضع القياسي

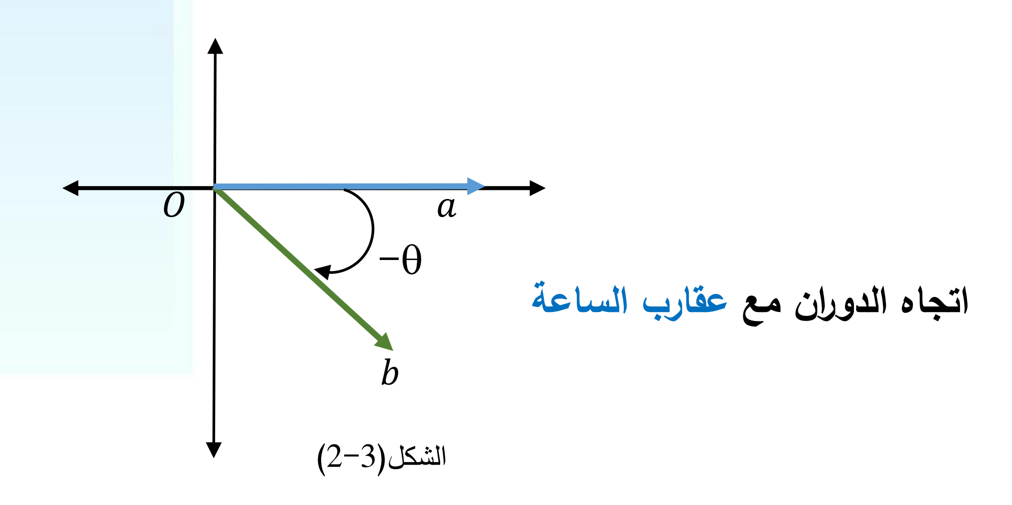
هي الزاوية التي رأسها واقع في نقطة الأصل وضلعها الابتدائي ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات. كما في الشكل [3 − 1]

فإذا كان اتجاه الضلع $\overrightarrow{ob}$ عكس عقارب الساعة تكون الزاوية موجبة

وإذا كان اتجاه الضلع $\overrightarrow{ob}$ مع عقارب الساعة تكون الزاوية سالبة



الشكل (3 −1)



الشكل(3−2)

[3 −2] القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية



الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن :
يعرف القياس الستيني والدائري

القياس الستيني للزاوية ورمزه $D°$

يمكن تقسيم الدائرة إلى 360 قسما وبذلك نحصل على 360 درجة بالتقدير الستيني ولدورة كاملة يكون قياس الزاوية = $360°$

فالدرجة بالتقدير الستيني = $1°$

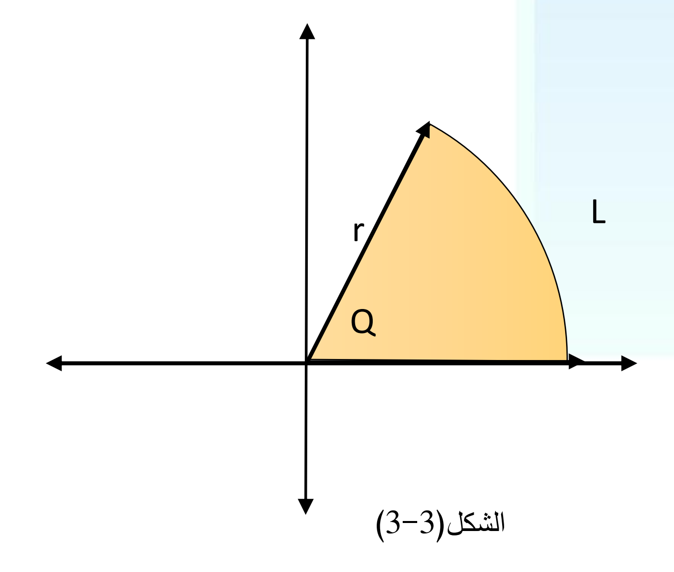
مثل: الزوايا ..... $135°$, $45°$, $30°$, $20°$, $13°$

القياس الدائري للزاوية ورمزه Q

هي الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله L ونصف قطر دائرته r ورمزها (Q) وتكون موجبة وتساوي :

$$Q = \frac{L}{r}$$

$$L = Q.r$$



الشكل(3−3)

الزاوية النصف قطرية: هي زاوية مركزية تحصر قوسا طوله يساوي طول نصف قطر دائرتها

r: طول نصف قطر الدائرة

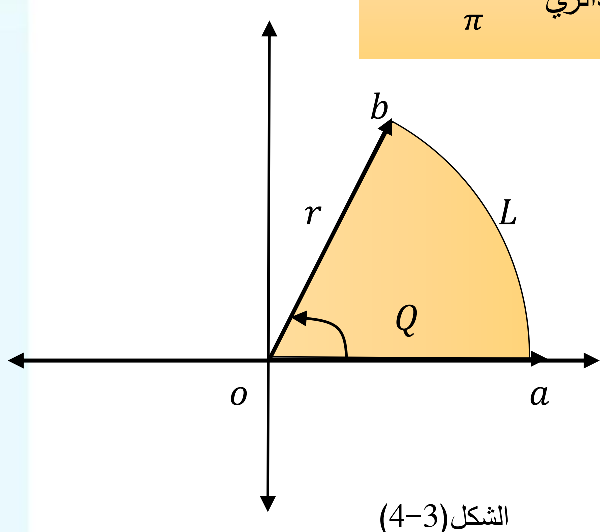
L: طول القوس

θ: قياس الزاوية المركزية

$$\theta = \frac{L}{r}$$



Q نصف قطرية بالتقدير الدائري $= \dfrac{180°}{\pi}$



الشكل(3−4)

بعض الزوايا بالتقدير الدائري

$\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$

تنبيه

كيف نفرق بين الزاويتين مثلا 21° ، 21

الزاوية 21° بالتقدير الستيني لوجود علامة الدرجة ($^{\circ}$)

الزاوية 21 بالتقدير الدائري لعدم وجود علامة الدرجة ($^{\circ}$)

تحويل الزاوية من التقدير الستيني D° إلى التقدير الدائري Q أو بالعكس

✍ تحويل القياس الستيني إلى القياس الدائري

$$Q = D^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

✍ تحويل القياس الدائري إلى القياس الستيني

$$D^{\circ} = Q \times \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

مثال 1

حول الزوايا 315° , 120° , 30° إلى التقدير الدائري

الحل : نستخدم العلاقة

$$Q = D^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$$

$$Q = 30° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$$

$$Q = 120° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3}$$

$$Q = 315° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{7\pi}{4}$$

مثال 2

حول الزاويتين $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ إلى التقدير الستيني

الحل :

$$D = Q \times \frac{180°}{\pi}$$

$$D = \frac{\pi}{3} \times \frac{180°}{\pi} = 60°$$

$$D = \frac{5\pi}{4} \times \frac{180°}{\pi} = 225°$$

ملاحظة

يمكن إيجاد عدد الدورات التي تدورها دائرة حول محور عمودي أو أفقي إذا علمت الزاوية بالتقدير الدائري

$$\because \quad Q = \frac{L}{r}$$

فاذا دار الضلع $\overrightarrow{ob}$ دورة كاملة فان L محيط الدائرة يساوي $2r\pi$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نحصل على :

$$Q = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi$$

ولأكثر من دورة نحصل على $Q = 2\pi n$ ، n عدد الدورات

مثال 3

تدور عجلة دائرية فعندما تكون الزاوية تساوي 10π فما عدد الدورات؟

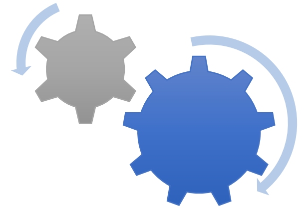
الحل:

$$Q = 2\pi \times n$$

$$\mathbf{10\pi = 2\pi n \Rightarrow n = 5}$$

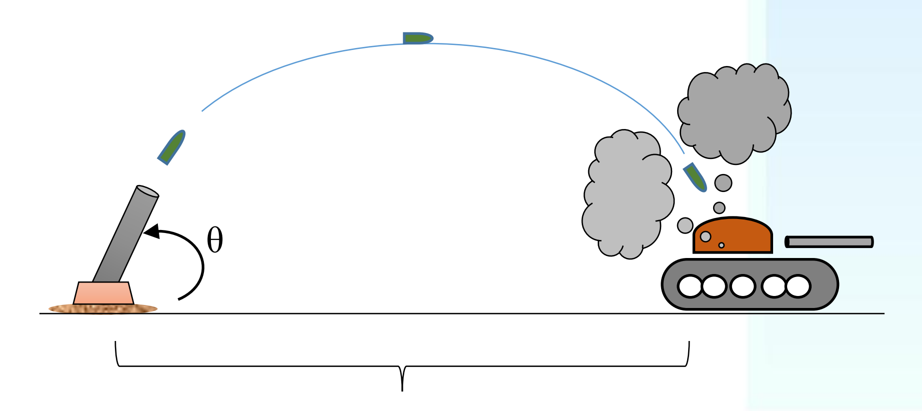
نشاط عملي

عجلتان دائريتان مسننتان أحدهما صغيرة نصف قطرها $3cm$ وعجلة كبيرة نصف قطرها $5cm$ ، فاذا كان عدد دورات العجلة الكبيرة 15 دورة فما عدد دورات العجلة الصغيرة ؟



هل تعلم

إن أبعد مدى لقذيفة الهاون (مدفع) عندما تكون الزاوية الموجهة بالوضع القياسي $45°$ والتي تساوي $\frac{\pi}{4}$ من الزوايا النصف قطرية لاحظ الشكل:

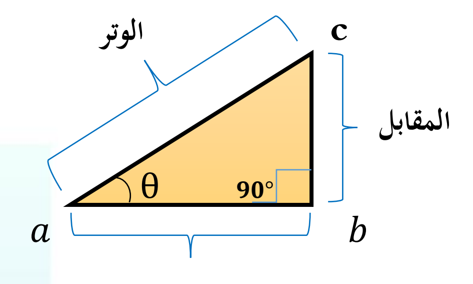


المدى الأفقي وهو البعد بين الهاون والعربة المستهدفة

الشكل(3−5)

[3-3]   الدوال الدائرية (الدوال المثلثية)

من المثلث القائم الزاوية في b:



الشكل(3−6)

نجد أن :

❶ دالة جيب الزاوية θ

$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

❷ دالة جيب تمام الزاوية θ

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

❸ دالة ظل الزاوية θ

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

❹ دالة ظل تمام الزاوية θ $\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

❺ دالة قاطع الزاوية θ $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

❻ دالة قاطع تمام الزاوية θ $\csc\theta = = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

ملاحظة:

- المقابل = طول الضلع المقابل
- الوتر = طول الوتر
- المجاور = طول الضلع المجاور

من العلاقات أعلاه ستلاحظ وتستنتج أن:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad , \quad \tan\theta \neq 0$$

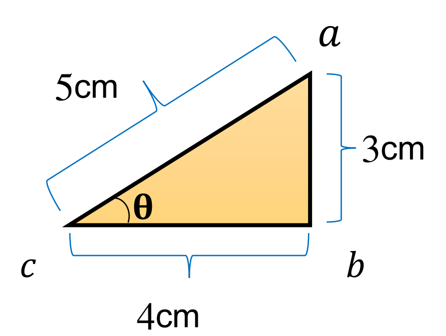
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sin\theta \neq 0$$

مثال 4

من المثلث abc القائم في b جد ناتج الدوال الآتية:

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\csc\theta$



الشكل(3−8)

الحل

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{3}$$

﴾ الزاويا الخاصة التي يتوجب على كل طالب حفظها ليتمكن من حل تطبيقات عملية مختارة وفق هذه الزوايا ﴿

وكذلك يمكن الاستعانة بالمثلث الاتي لحفظ الزوايا الخاصة

	30°	60°	45°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

مثال 5

جد ناتج:

$\sin 30°$, $\cos 60°$, $\tan 45°$, $\sec 60°$, $\cot 30°$

الحل:

$\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, $\tan 45° = 1$

$\csc 60° = 2$, $\cot 30° = \sqrt{3}$

[3 -4] تطبيقات عملية على بعض الدوال الدائرية

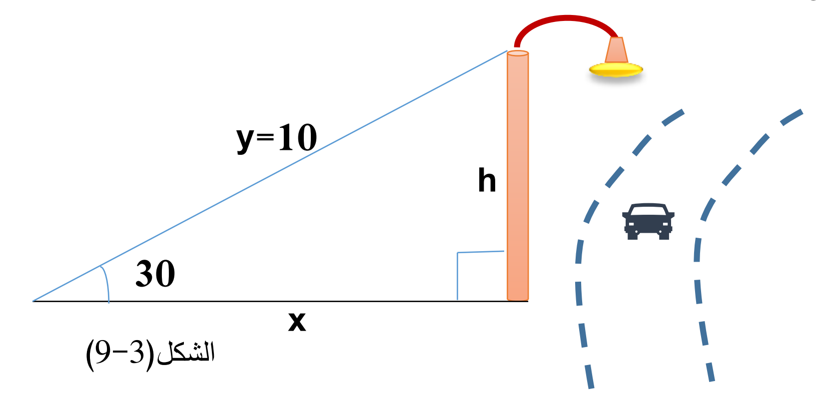
مثال 6

أراد أحد عمال الكهرباء في ولاية الخير تثبيت عمود كهرباء لإنارة إحدى الطرق الخارجية في الولاية ، فإحتاج إلى وتر طوله 10 m مثبت من قمة العمود إلى الأرض ويميل عن الأرض بزاوية 30^0

1) فما بعد نقطة الوتر في الأرض عن قاعدة عمود الكهرباء

2) ما هو ارتفاع عمود الكهرباء

الحل :



الشكل(3−9)

1) $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$$\cos 30° = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow 2x = 10\sqrt{3} \Rightarrow x = 5\sqrt{3}\, m$$

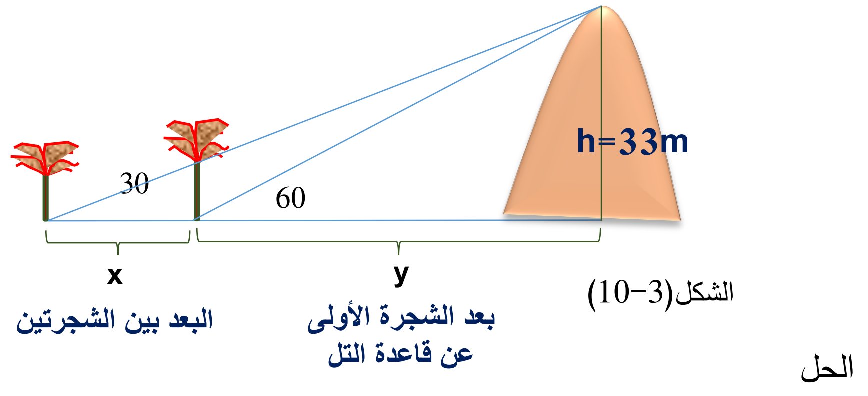
2) $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$$\sin 30° = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{10} \Rightarrow 2h = 10 \Rightarrow h = 5\, m$$

مثال 7

ضمن الأعمال الزراعية التي يقوم بها ديوان الخدمات في ولاية أبين ، قرر أحد مهندسي الولاية زراعة شجرتين على خط مستقيم واحد وبالقرب من تل ارتفاعه $33m$ ومن على قمة هذا التل رصد زاوية الإنخفاض عن قاعدة الشجرة الأولى 60° وزاوية الإنخفاض عن قاعدة الشجرة الثانية 30° فكم كان البعد بين الشجرتين ؟

الحل :



الشكل(3−10)

الحل

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 60^{\circ} = \frac{33}{y} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{33}{y} \rightarrow y = \frac{33}{\sqrt{3}}$$

$$\rightarrow y = \frac{11 \times 3}{\sqrt{3}} = 11\sqrt{3}\,m$$

$$\tan 30^{\circ} = \frac{33}{x + y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{33}{x + 11\sqrt{3}}$$

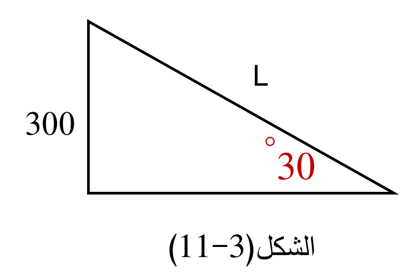
$$\rightarrow x + 11\sqrt{3} = 33\sqrt{3} \rightarrow x = 22\sqrt{3}\,m$$

مثال 8

من قمة تل إرتفاعه 300 م وجد راصد شجرة بزاوية انخفاض (30^0)

فما البعد بين الراصد والشجرة.

الحل



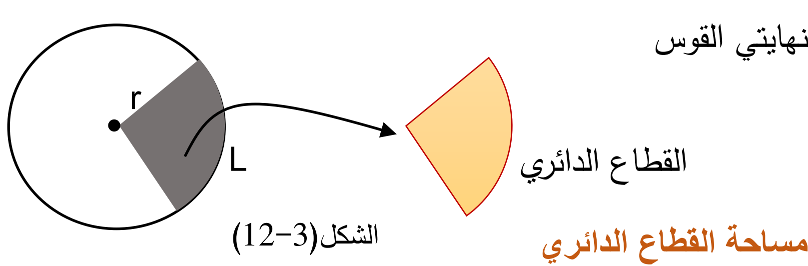
الشكل(3−11)

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 30° = \frac{300}{L} \quad \to \quad \frac{1}{2} = \frac{300}{L} \quad \to \quad L = 600\ m$$

القطاع الدائري

هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصف قطري الدائرة المارين بنهايتي القوس



الشكل(3−12)

مساحة القطاع الدائري

$$A = \frac{1}{2}\, r\, L \qquad \ldots\ldots\ (\ 1\ )$$

ومن العلاقة

$$Q = \frac{L}{r} \quad \to \quad L = Qr$$

نعوض في معادلة (1)

$A = \frac{1}{2} r^2 Q$ ..... (2)

محيط القطاع الدائري

$P = L + 2r$

مثال 9

قطاع دائري طول نصف قطر دائرته 6cm وقياس زاويته 30° جد :

1) مساحته ؟ 2) محيطه ؟

الحل :

1) $Q = D^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = 30^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{\pi}{6}$

$A = \frac{1}{2} r^2 Q$

$A = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi = 3 \times 3.14 = 9.42\ cm^2$

2) $L = Q . r = \frac{\pi}{6} \times 6 = \pi = 3.14\ cm$

$P = L + 2r$

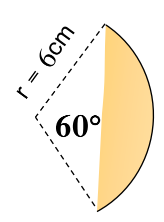
$= 3.14 + (6 \times 2) = 15.14$ cm

تمارين [1 - 3]

س1) طائرة مسيرة تابعة لدولة الخلافة الإسلامية تحلق فوق ولاية حلب ومن على ارتفاع $6\ km$ عن سطح الأرض رصدت هدفا معاديا بزاوية انخفاض $60°$ فكم هي المسافة بين الطائرة والهدف ؟

س2) قطاع دائري محيطه $12\pi\ cm$ وطول نصف قطر دائرته $6\ cm$ جد قياس زاويته بالتقدير الستيني ومساحته ؟

س3) جد مساحة القطعة الدائرية في الشكل الاتي :

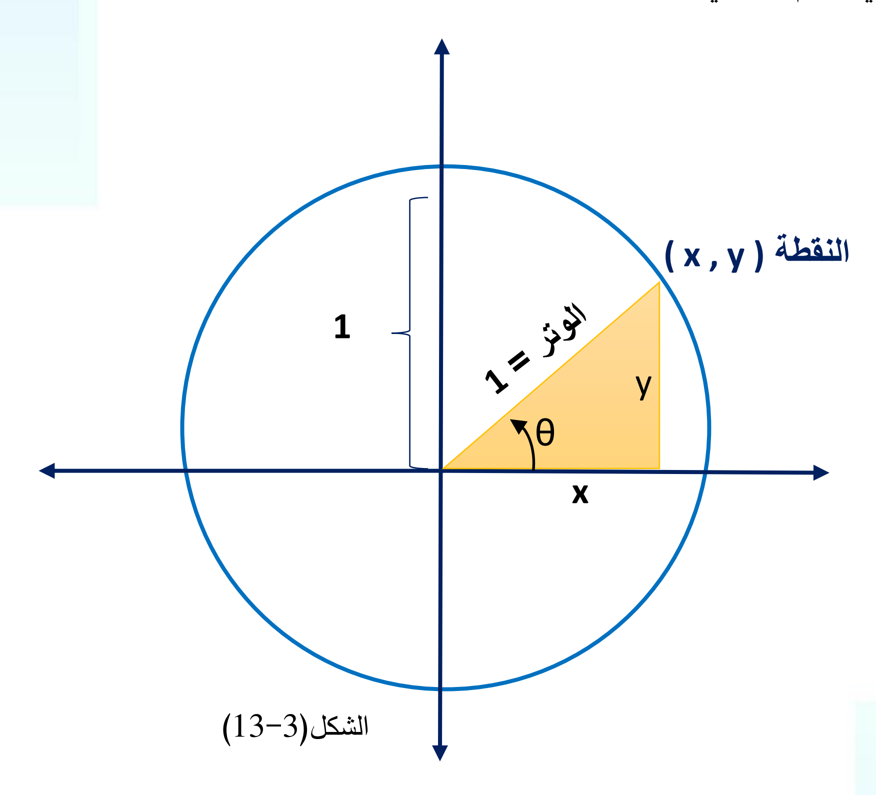


س4) زاوية مركزية تقابل قوسا طوله $3\pi\ cm$ ونصف قطر دائرتها $9\ cm$ جد مقدار الزاوية بالتقديرين الستيني والدائري ثم جد عدد الدورات الذي دارها ضلعها الثانوي .

س5) إذا علمت أن $\sin\theta = 0.6$ ، $\tan\theta = 0.75$ جد $\cos\theta$

[3 -5] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية

دائرة الوحدة: هي دائرة طول نصف قطرها يساوي الوحدة ومركزها نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد حيث $x^2 + y^2 = 1$ تسمى بمعادلة دائرة الوحدة.



الشكل(3−13)

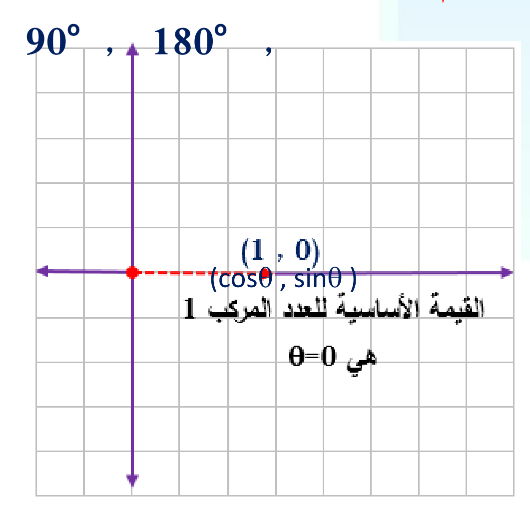
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \rightarrow \sin\theta = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin\theta = y$$

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \rightarrow \cos\theta = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos\theta = x$$

$$(\,x\,,y\,) = (\cos\theta\,,\ \sin\theta\,)$$

قيم الدوال الدائرية للزوايا الخاصة:

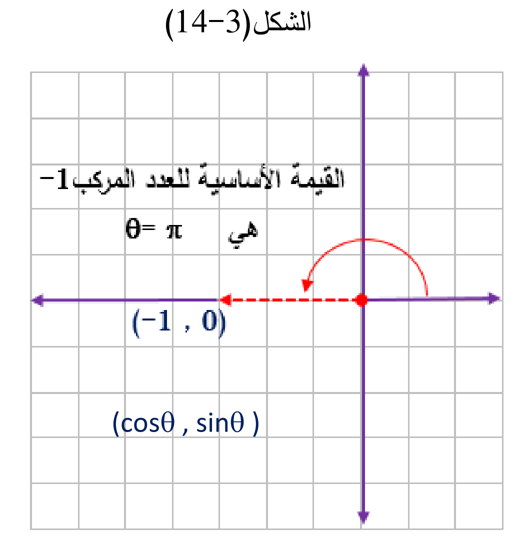
$270°$, $360°$ $0°$, $90°$, $180°$,



$\cos 0° = 1$

$\sin 0° = 0$

الشكل(3−14)



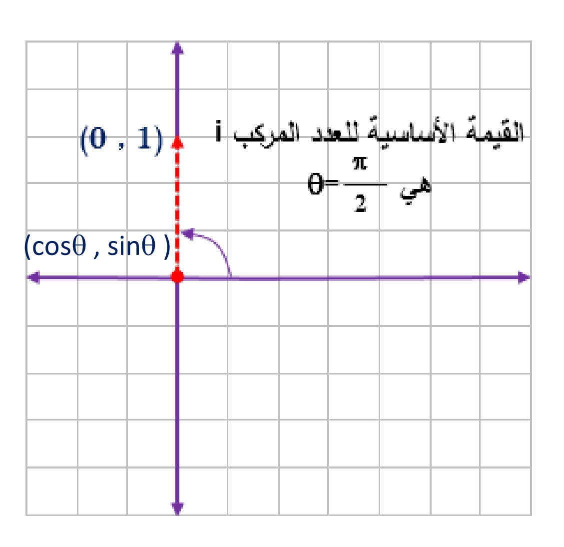
$\cos\pi = -1$

$\sin\pi = 0$

الشكل(3−15)

$\cos 90^{\circ} = 0$

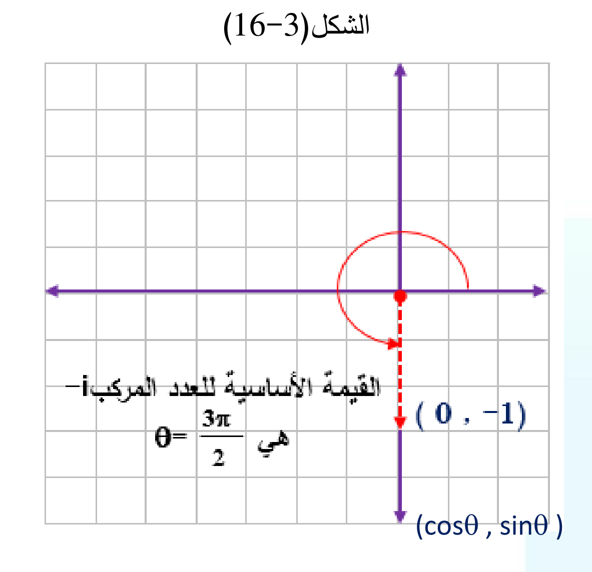
$\sin 90^{\circ} = 1$



الشكل(3−16)

$\cos 270^{\circ} = 0$

$\sin 270^{\circ} = -1$



الشكل(3−17)

موقع النقطة المثلثية وقيم الدوال الدائرية

في الربع الأول ← القيمة الأساسية للسعة = $90° - \theta$

في الربع الثاني ← القيمة الأساسية للسعة = $180° - \theta$

أو = $90° + \theta$

في الربع الثالث ← القيمة الأساسية للسعة = $180° + \theta$

أو = $270° - \theta$

في الربع الرابع ← القيمةالأساسية للسعة = $360° - \theta$

أو = $270° + \theta$

جدول إشارات الدوال الدائرية

الدالة	الربع الاول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
$\sin\theta$	موجب	موجب	سالب	سالب
$\cos\theta$	موجب	سالب	سالب	موجب
$\tan\theta$	موجب	سالب	موجب	سالب

1) في الربع الأول

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

2) في الربع الثاني

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

أو

$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$
$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

3) في الربع الثالث

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$
$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

أو

$\sin(270 - \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270 - \theta) = -\sin\theta$

4) في الربع الرابع

$\sin(360 - \theta) = -\sin\theta$
$\cos(360 - \theta) = \cos\theta$

أو

$\sin(270 + \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270 + \theta) = \sin\theta$

فمثلا

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أو

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 11

جد ناتج كلاً ممايأتي :

$\cos 120^\circ$, $\sin 135^\circ$, $\tan 150^\circ$

الحل :

$$\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ)^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 150^\circ = -\tan(180^\circ - 30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال 12

جد ناتج كلاً من: $\sin 210^\circ$, $\cos 240^\circ$, $\tan 225^\circ$

الحل:

$$\sin 210^\circ = -\sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

مثال13

جد ناتج كلاً من :

$\cos 330° \quad , \quad \sin 300° \quad , \quad \tan 315°$

الحل :

$$\cos 330° = \cos(360° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 300° = -\sin(360° - 60°) = -\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 315° = -\tan(360° - 45°) = -1$$

نشاط

جد ناتج كلاً ممّا يأتي:

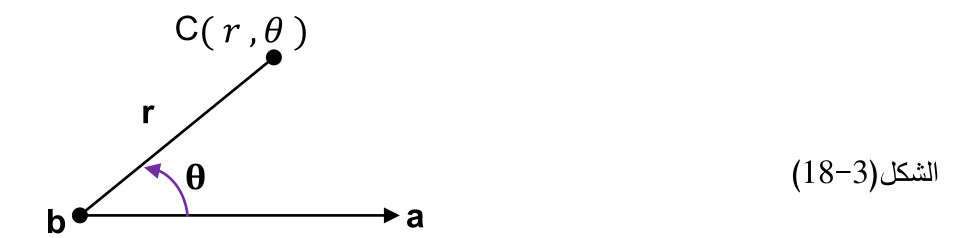
a) $\sin 330° \cos 300° + \tan 225° \cos 225° \sin 135°$

b) $\sin 90° \cos 180° - \tan 0° \cot 90°$

c) $\sec 240° \csc 120°$

[3 – 6]الاحداثيات القطبية

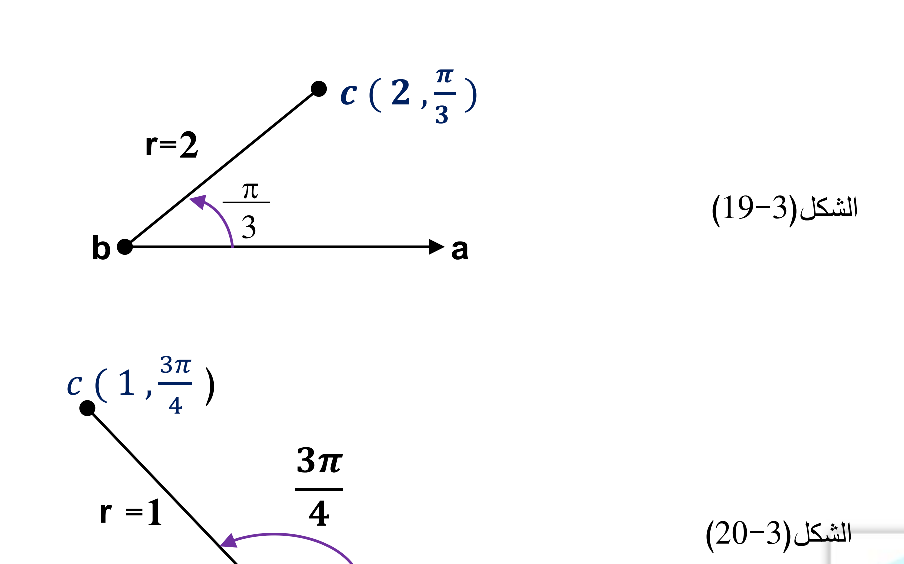
لايجاد الاحداثيات القطبية نأخذ مستقيما ثابتا مثل ab حيث b نقطة ثابتة عليه ، ونعين أي نقطة عليه مثل c في المستوي متى علم بعدها عن النقطة الثابتة b والزاوية التي يصنعها هذا البعد مع المستقيم ab وليكن bc = r والزاوية التي يصنعها bc مع ab هي θ ويقال عن الإحداثي (r, θ) بالاحداثي القطبي .



الشكل(3–18)

الصيغة الاحداثية القطبية هي (r, θ)

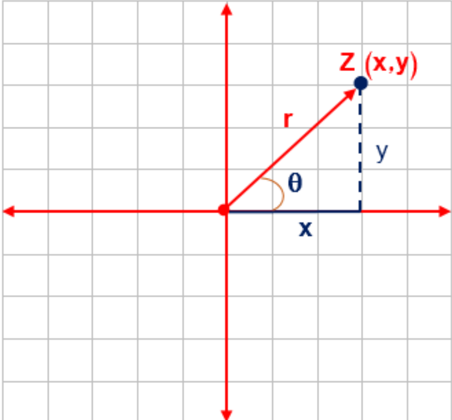
لاحظ الإحداثيات القطبية في الاشكال الآتية:



الشكل(3–19)

الشكل(3–20)

🗁 كيف نحول الإحداثي القطبي (r, θ) إلى الإحداثي (x, y) وبالعكس



الشكل(3−21)

من خاصية المثلث القائم الزاوية:

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

r يمثل مقياس العدد المركب z ويرمز له بالرمز $\| z \|$

وهو عدد حقيقي غير سالب (عدد موجب)

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta$$

فنحصل على النقطة (x, y)

مثال 14

حول النظام الإحداثي القطبي $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ إلى النظام الإحداثي (x, y)

الحل :

$$r = 2 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$(x, y) = (1, \sqrt{3})$$

مثال 13

حول النظام الإحداثي القطبي $\left(\sqrt{2}\ ,\ \frac{3\pi}{4}\right)$ إلى النظام (x,y)

الحل:

$$r = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$y = r\sin\theta = \sqrt{2}\ \sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\ \cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -1$$

$$(x, y) = (-1, 1)$$

مثال 14

حول $(1 , \sqrt{3})$ إلى النظام الإحداثي القطبي ؟

الحل :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(r , \theta) = (2 , \frac{\pi}{3})$$

مثال 15

جد النظام الإحداثي القطبي للنقطة $(2 , -2\sqrt{3})$

الحل :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$(r , \theta) = (4 , \frac{5\pi}{3})$$

تمارين(3-2)

س1) اوجد القيمة العددية لكلاً ممّا يأتي :

$\sin 330^{\circ}$ ، $\cos\frac{11\pi}{3}$ ، $\tan(90^{\circ}+30^{\circ})$

س2) حول إلى النظام الإحداثي القطبي كلاً من :

1) $(1 , -1)$

2) $(-2 , 2)$

3) $(-1 , -\sqrt{3})$

س3) جد ناتج كلاً من :

a) $\cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$

b) $\cot 33\pi + \tan 33\pi$

c) $\cos\frac{17\pi}{6} + \sin\frac{17\pi}{6}$

[3 - 8] المتطابقات المثلثية

إن الغرض من دراستنا للمتطابقات المثلثية هو
تسهيل دوال دائرية تمهيداً لإيجاد قيمها أو رسمها أو أجراء عملية الإشتقاق عليها فيسهل إيجاد سرعتها وتعجيلها.
كذلك تسهل إجراء عملية التكامل للدوال الدائرية فيسهل إيجاد مساحاتها وحجومها .... الخ.
درست في بداية الفصل المتطابقات الآتية:

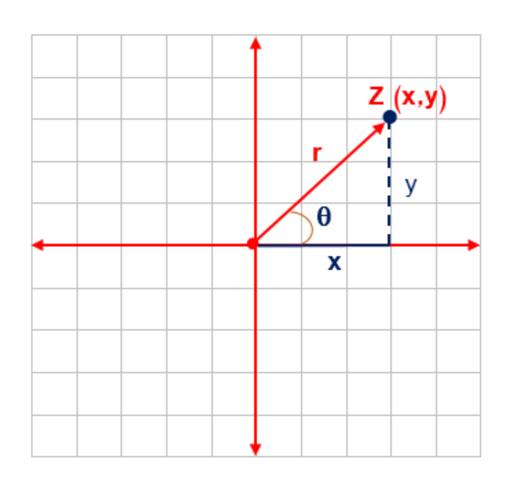
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

من المثلث القائم الزاوية



الشكل(3−22)

$x^2 + y^2 = 1$ تمثل معادلة دائرة

النقطة المثلثية $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على :

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (1

من هذه المتطابقة نحصل على:

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

لو قسمنا المتطابقة الأولى على $\cos^2\theta$ فسنحصل على :

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ .... (2

لوقسمنا المتطابقة الأولى على $\sin^2\theta$ فسنحصل على :

$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ .... (3

نشاط

إذا كانت $\theta = 30^\circ$ تحقق من المتطابقات الآتية :

(1 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

(3 $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

مثال 16

أثبت صحة المتطابقات الآتية :

1) $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}=\sec\theta$

2) $\frac{5\sin^2\theta-\cos^2\theta+1}{1-\cos^2\theta}=6$

3) $(\sec^2\theta-1)(1-\sin^2\theta)=\sin^2\theta$

4) $(\sec^2\theta-\tan^2\theta)(2-2\cos^2\theta)=2\sin^2\theta$

الحل:

(1
$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

(2
$$\frac{5\sin^2\theta-\cos^2\theta+1}{1-\cos^2\theta}=\frac{5\sin^2\theta+1-\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}$$

(3
$$(\sec^2\theta-1)(1-\sin^2\theta)=(\tan^2\theta)(\cos^2\theta)$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\cos^2\theta=\sin^2\theta$$

4) $(\sec^2\theta - \tan^2\theta)(2 - 2\cos^2\theta)$

$= (1)(2(1 - \cos^2\theta)) = 2\sin^2\theta$

متطابقات لمجموع زاويتين مختلفتين أو فرق زاويتين مختلفتين

$sin(x + y) = sinx\ cosy + cosx\ siny$ ....4)

$sin(x - y) = sinx\ cosy - cosx\ siny$ ....5)

$cos(x + y) = cosx\ cosy - sinx\ siny$ ....6)

$cos(x - y) = cosx\ cosy + sinx\ siny$ ....7)

ومن المتطابقة (4)

$sin\ (x + x) = sinx\ cosx + cosx\ sinx$

$sin(2x) = 2sinx\ cosx$

فنحصل على المتطابقة :

$sin2x = 2sinx\ cosx$ ....8)

وبنفس الطريقة نحصل على

$sin4x = 2sin2x\ cos2x$

$sin6x = 2sin3x\ cos3x$

$sin3x = 2sin\frac{3}{2}x\ cos\frac{3}{2}x$

ومن المتطابقة (6)

$$cos(x+x) = cosx\, cosx - sinx\, sinx$$

$$cos(2x) = cos^2x - Sin^2x$$

فنحصل على المتطابقة

$$cos2x = cos^2x - Sin^2x \ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

إذا عوضنا عن $cos^2x = 1 - Sin^2x$ فسنحصل على:

$$cos2x = 1 - 2Sin^2x$$

إذا عوضنا عن $Sin^2x = 1 - cos^2x$ فسنحصل على:

$$cos2x = 2\,cos^2x - 1$$

ومن المتطابقة $cos2x = 1 - 2Sin^2x \rightarrow 2Sin^2x = 1 - cos2x$

نقسم على **2** فنحصل على :

$$Sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x) \qquad \ldots\ldots(10$$

ومن المتطابقة $cos2x = 2cos^2x - 1 \rightarrow 2cos^2x = 1 + cos2x$

نقسم على **2** فنحصل على :

$$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x) \qquad \ldots\ldots(11$$

إذا قسمنا المتطابقة (4) على المتطابقة (5) ومع التبسيط نحصل على

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\,[1 + \mathbf{cos2x}] \qquad \mathbf{......(12}$$

إذا قسمنا المتطابقة (4) على المتطابقة (5) ومع التبسيط نحصل على:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \qquad .....(\ 13$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \qquad ....(14$$

مثال 17

أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) $\cos^4 - \sin^4 = \mathbf{cos2x}$

ب) $\frac{\sin 2x - 2\sin x}{\cos x - 1} = 2\mathrm{sinx}$

جـ) $\frac{\mathbf{cos}2x}{\mathbf{cos}x - \mathrm{sinx}} = \mathbf{cos}x + \mathrm{sinx}$

د) $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \tan^2 x$

هـ) $(1 - 2\sin^2 x)(\sec 2x = 1)$

الحل

أ) $\cos^4 - \sin^4$ نحلل بطريقة الفرق بين مربعين

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \mathbf{cos2x}\ (\mathbf{1}) = \mathbf{cos2x}$$

ب) $$\frac{\sin 2x - 2\sin x}{\cos x - 1} = \frac{2\text{sinx}\,\mathbf{cosx}}{\cos x - 1} = \frac{2\text{sinx}(\mathbf{cos}x - 1)}{\mathbf{cos}x - 1} = 2\text{sinx}$$

جـ) $$\frac{\mathbf{cos}2x}{\mathbf{cos}x - \text{sinx}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\mathbf{cos}x - \text{sinx}} = \frac{(\mathbf{cos}x - \text{sinx})(\mathbf{cos}x + \text{sinx})}{\mathbf{cos}x - \text{sinx}}$$

$$= \mathbf{cos}x + \text{sinx}$$

د) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ نقسم البسط والمقام على 2

$$\frac{\frac{1-\cos x}{2}}{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

هـ) $(1 - 2\sin^2 x)(\sec 2x)$

$$\left(\frac{1}{\cos 2x}\right)(\sin 2x) = 1$$

مثال 18

جد ناتج كلاً من $\sin 75°$ ، $\cos 105°$

الحل:

لإيجاد قيمة $\sin 75°$ نستخدم المتطابقة

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°)$$

$$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ولإيجاد قيمة $\cos 105°$ نستخدم المتطابقة

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(60+45) = \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

تمارين(3 – 3)

س1) جد ناتج كلاً من الدوال الآتية:

1) $\cos^2 15 - \sin^2 15$

2) $2 \sin 22.5 \cos 22.5$

س2) أثبت أن:

1) $\sqrt{1+\sin 2x} = \cos x + \sin x$

2) $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$

3) $\frac{\sin^3 x}{1-\cos x} = \sin x + \sin x \cos x$

4) $\sin^4 x = \frac{1}{2}[1 - 2\cos 2x + \sin^2 x]$

5) $\frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$

[9 - 3] المعادلات المثلثية

إن الفائدة العملية للمعادلة المثلثية هي إيجاد قيم الزوايا التي تحقق هذه المعادلة وتتيح لنا إيجاد نقاط التقاطع مع المحور السيني لإيجاد المساحة المحددة بين منحني الدالة الدائرية ومحور السينات وكذلك تفيدنا أيضا في إيجاد الحجوم الدورانية الناتجة من دوران منحني الدالة الدائرية مع محور السينات او الصادات حسب منهجنا.

لحل المعادلة المثلثية نركز على ناتج المعادلة وموقع الزاوية الذي يحقق هذا الناتج فمثلا

إذا كان لدينا المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$

يكون $\sin x$ موجب في الربع الأول والربع الثاني

ففي الربع الأول $x = 30^{\circ}$

وفي الربع الثاني $x = 180^{\circ} - 30^{\circ} = 150^{\circ}$

وإذا كان لدينا المعادلة $\sin x = -\frac{1}{2}$

يكون $\sin x$ سالب في الربع الثالث والربع الرابع

ففي الربع الثالث $x = 180^{\circ} + 30^{\circ} = 210^{\circ}$

وفي الربع الرابع $x = 360^{\circ} - 30^{\circ} = 330^{\circ}$

مثال 19

حل المعادلة $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ضمن الفترة $[\ 0\ ,2\pi\ ]$

الحل

يكون $\sin x$ موجبا في الربع الأول والربع الثاني

ففي الربع الأول $x = 60^\circ$

وفي الربع الثاني $x = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

مجموعة حلول المعادلة $\{ 60^\circ ، 120^\circ \}$

مثال 20

حل المعادلة $\tan x = -1$ ضمن الفترة $[\ 0\ ،2\pi\ ]$

الحل

يكون $\tan x$ سالبا في الربع الثاني والربع الرابع

ففي الربع الثاني $x = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

وفي الربع الرابع $x = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

مجموعة حلول المعادلة $\{ 135^\circ ، 315^\circ \}$

نشاط

حل المعادلة

1) $\tan x = -\sqrt{3}$

2) $(2\cos x + 1)(8\sin^3 x - 1) = 0$

مثال 21

حل المعادلة $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

الحل:

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

إما $\cos x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$

يكون $\cos x$ موجباً في الربع الأول وفي الربع الرابع

في الربع الأول $x = 45^\circ$

وفي الربع الرابع $x = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

أو $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

يكون $\cos x$ سالباً في الربع الثاني وفي الربع الثالث

ففي الربع الثاني $x = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

وفي الربع الثالث $x = 45^\circ + 180^0 = 225^\circ$

مجموعة حلول المعادلة $\{ 45^\circ , 135^\circ , 315^\circ , 225^\circ \}$

مثال 22

حل المعادلة $\sin x = 0$

الحل:

نلاحظ أن $\sin x = 0$ عندما تكون قيم
$x = 0°, 180°, 360°$

مجموعة حلول المعادلة $\{0°, 180°, 360°\}$

مثال 23

حل المعادلة $\cos x = 0$

الحل

نلاحظ أن $\cos x = 0$ عندما تكون قيم
$x = 90°, 270°$

مجموعة حلول المعادلة $\{90°, 270°\}$

مثال 24

حل المعادلة $\tan x = 0$

الحل:

نلاحظ أن $\tan x = 0$ عندما تكون قيم
$x = 0°, 180°, 360°$

مجموعة حلول المعادلة $\{0°, 180°, 360°\}$

مثال 25

حل المعادلة $\sin 2x - \cos x = 0$

الحل

نستفاد من القاعدة $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ونعوضها في المعادلة :

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x\ (2\sin x - 1) = 0$$

إما $\cos x = 0$

$$x = 90^\circ, 270^\circ$$

أو $2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

يكون $\sin x$ موجبا في الربع الأول والثاني

في الربع الأول $x = 30^\circ$

وفي الربع الثاني $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

مجموعة حلول المعادلة $\{150^\circ, 30^\circ, 270, 90^\circ\}$

مثال 26

حل المعادلة $\cos x = \sin x$

الحل:

نقسم طرفي المعادلة على $\cos x$ فنحصل على

$$\tan x = 1$$

يكون ظاس موجبا في الربع الأول وفي الربع الثالث

في الربع الأول $x = 45^\circ$

وفي الربع الثالث $x = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$

مجموعة حلول المعادلة $\{45^\circ, 225^\circ\}$

مثال 27

حل المعادلة $2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

الحل:

نستطيع تحليل المعادلة $(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

إما $cosx = 1$

عندما

$x = 0°, \quad 360°$

أو $\cos x = \frac{-1}{2}$

يكون cosx سالبا في الربع الثاني والثالث

في الربع الثاني $x = 180° - 60° = 120°$

وفي الربع الثالث $x = 180° + 60° = 240°$

مجموعة حلول المعادلة $\{0°, 360°, 120°, 240°\}$

تمارين (3-4)

حل المعادلات الآتية

1) $\sin 3x = 0$, وضمن الفترة $[-\pi, \pi]$

2) $\sin 2x = \cos x$

3) $2\sin^2 x - 1 + \sec 120° = 0$

4) $\cos 2x - \cos x = 0$

5) $\csc^2 x - 2 = 0$

6) $\cot x + \tan x = \cos x$

7) $\cos 2x = \sin x$

8) وضمن الفترة $[-\pi, \pi]$, $\cos x = 0$

الوحدة الرابعة

الدالة والغاية والاستمرارية



الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الرابعة أن يكون الطالب قادرا على أن:

1) يجد مجال ومدى الدالة
2) يرسم الدالة
3) يجد غاية الدالة
4) يثبت استمرارية الدالة

مفردات الوحدة الرابعة

[4 -1] تعريف الدالة (الإقتران)

الهدف من الدرس

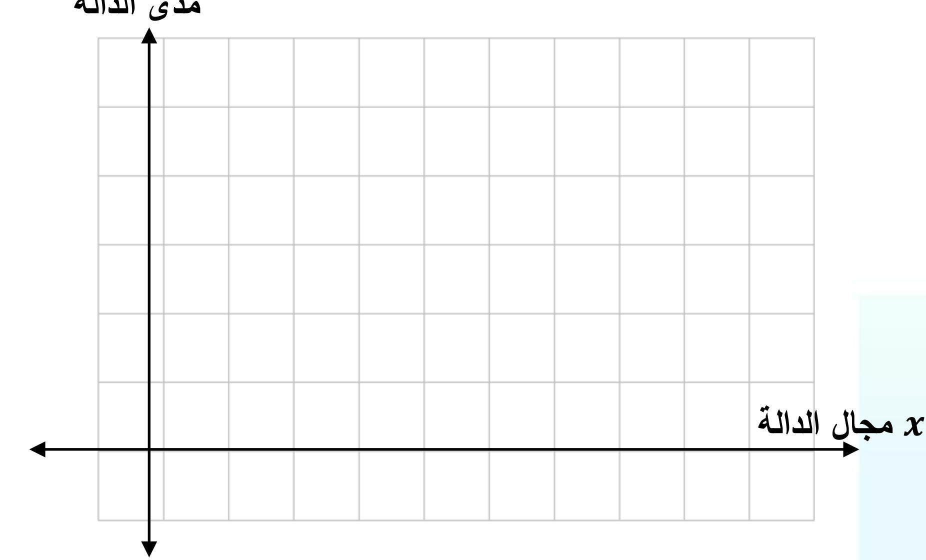
أن يكون الطالب قادرا على أن:

1) يعرف الدالة 2) يجد مجال ومدى الدالة

الدالة (الإقتران) إذا ارتبطت كميتان متغيرتان x، y بعلاقة بحيث أعطينا قيمة للمتغير الأول x استطعنا إيجاد قيمة للكمية الثانية y المناظرة لـ x ، فنسمي y دالة للمتغير الأول x وتكتب بالشكل : $y = f(x)$.

يسمى x مجال الدالة وهو متغير مستقل

يسمى y مدى الدالة وهو متغير تابع للمتغير x



الشكل$(1-4)$

أنواع بعض الدوال التي سوف نحتاجها في منهجنا

1) الدالة الثابتة : $y = f(x) = a$ ، حيث a عدد حقيقي.

2) دالة المستقيم وشكلها: $ax + by + c = 0$.

3) دالة المنحني من الدرجة الثانية مثل:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

4) دالة المنحني من الدرجة الثالثة مثل:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

الدوال الأربع السابقة تسمى بالدوال كثيرات الحدود ومجالها جميعها هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزيئة من مجموعة الأعداد الحقيقية.

5) الدالة الكسرية مثل:

$$y = f(x) = \frac{2}{x+3}$$

6) الدالة الجذرية (جذر تربيعي): $y = f(x) = \sqrt{x+3}$

الدالة الجذرية (جذر تكعيبي): $y = f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

7) الدالة الكسرية والجذرية في نفس الوقت:

مثل :

$$y = f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$$

8) الدالة الأسية مثل: $y = 5^x$

9) الدالة اللوغاريتمية مثل: $y = \log(x+1)$

10) دالة اللوغاريتم الطبيعي مثل: $y = \ln(2x+1)$

[4 - 2] إيجاد مجال الدالة

وهو قيم x التي تجعل قيم y حقيقية.

أولاً إيجاد أوسع مجال للدالة الكسرية

مجال الدالة = مجموعة الاعداد الحقيقية R ماعدا قيم x

التي تجعل المقام =0

لان الكمية: $y = \frac{\text{كمية}}{\text{صفر}}$ غير معرفة

مثال 1

جد أوسع مجال لكلاً من:

1. $y = \frac{2x}{x-2}$
2. $y = \frac{4x}{2x-6}$
3. $y = \frac{1}{9-x^2}$

الحل

1. نجعل المقام =0

$x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$

فيكون أوسع مجال للدالة = $R - \{2\}$

2. نجعل المقام =0

$2x - 6 = 0 \rightarrow x=3$

فيكون أوسع مجال للدالة = $R - \{3\}$

3) نجعل المقام =0

$9 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

أوسع مجال = R−{ ±3 }

مثال 2

جد أوسع مجال للدالة

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

الحل

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \notin R$

أوسع مجال للدالة =R

ثانيا إيجاد أوسع مجال لدالة الجذر التربيعي

مجال دالة الجذر التربيعي هو قيم x

بشرط أن يكون داخل الجذر التربيعي ≥ 0

مثال 3

جد أوسع مجال لكلاً مما يأتي

1. $y = \sqrt{x - 1}$
2. $y = \sqrt{2 - x}$

الحل

1. $x \geq 1 \quad \rightarrow \quad x - 1 \geq 0$

أوسع مجال للدالة = $\{x : x \geq 1\}$

2. $x \leq 2 \quad \rightarrow \quad -x \geq -2 \quad \rightarrow \quad 2 - x \geq 0$

أوسع مجال للدالة = $\{x : x \leq 2\}$

ثالثاً إذا كانت الدالة جذر تكعيبي

فأن أوسع مجال للدالة هو

مجموعة الاعداد الحقيقية (R)

مثال 4

جد أوسع مجال للدالة: $y = \sqrt[3]{2x+3}$

الحل: أوسع مجال = R

ملحوظة: إذا كانت $y = \sqrt[n]{f(x)}$ حيث n يسمى بدليل الجذر، إذا كانت:

أ. n عدد زوجي، $f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى فإن $f(x) \geq 0$

ب. n عدد فردي أكبر من الواحد فإن أوسع مجال للدالة هو R

رابعاً إيجاد أوسع مجال للدالة الكسرية والجذرية

حالة[1]: إذا كان المقام جذر تربيعي

أن يكون داخل الجذر التربيعي > 0

مثال 5

جد أوسع مجال للدالة $y=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

الحل:

$x+3>0 \quad \rightarrow \quad x>-3$

أوسع مجال = $\{x:\ x>-3\}$

حالة2: إذا كان المقام جذر تكعيبي:

أوسع مجال للدالة = R ماعدا قيم x التي تجعل المقام =0

مثال 6

جد أوسع مجال للدالة

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

الحل

أوسع مجال للدالة = $R-\{2\}$

﴿ خامساً ﴾ اذا كانت الدالة لوغارتيمية $y = \log x$

أوسع مجال هو: $\{x: x > 0\}$

مثال 7

جد أوسع مجال لكلا من

1. $y = \log(2x + 4)$
2. $y = \log(1 - x)$

الحل:

1. $2x + 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x > -2$

أوسع مجال = $\{x: x > -2\}$

2. $1 - x > 0 \quad \rightarrow \quad -x > -1 \quad \rightarrow x < 1$

أوسع مجال = $\{x: x < 1\}$

﴿ سادساً ﴾ إذا كانت الدالة كثيرة حدود

فأوسع مجال هو مجموعة الاعداد الحقيقية

مثال 8

جد أوسع مجال لكلاً من:

1) $y = x^2 + 3x - 1$ أوسع مجال=R

2) $y = x^3 + 9x - 1$ أوسع مجال =R

الصورة العامة للدوال كثيرات الحدود هي:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

1- $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ تسمى بمعاملات الحدود وهي أعداد حقيقية

2- n أس المتغير X حيث n عدد طبيعي

3- مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية

4- $a_n \neq 0$ حيث a_n هو معامل أكبر أس للمتغير X

[4 – 3] التمثيل البياني للدالة لبعض الدوال كثيرات الحدود

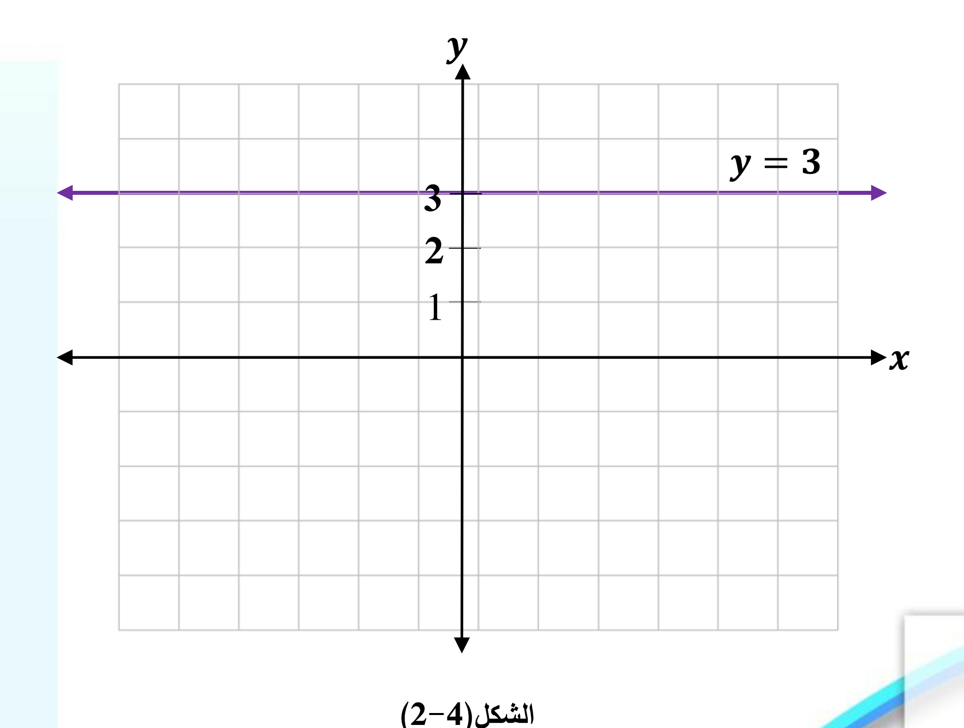
1) رسم الدالة الثابتة $y = a$ ، حيث $a \in R$

هو خط مستقيم يوازي محور السينات

هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية مجالها هو R

مثال 9

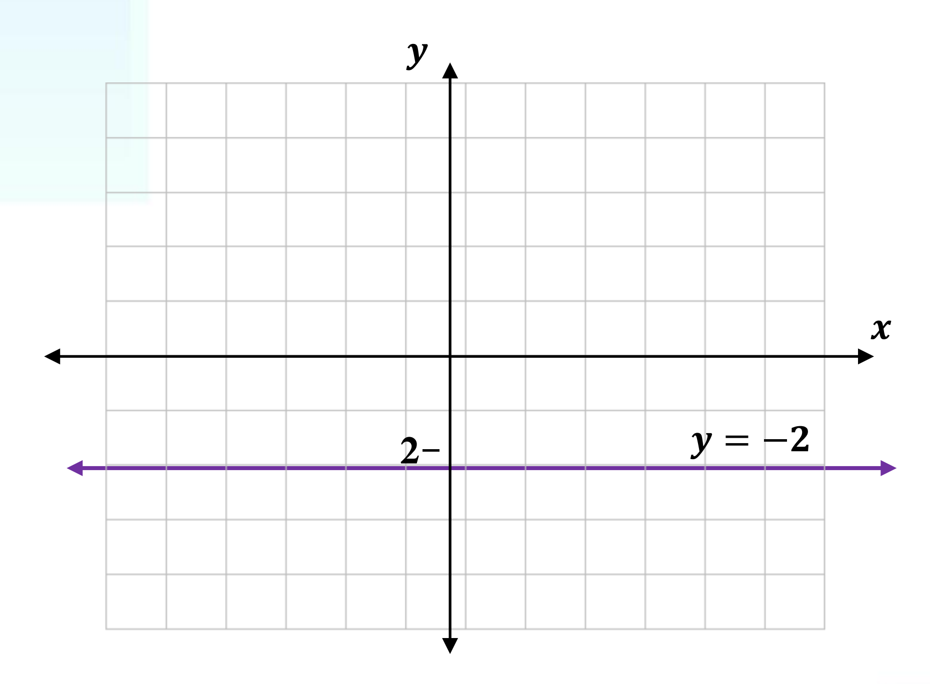
مثل بيانيا الدالة $y = 3$



الشكل(4–2)

مثال 10

مثل بيانيا الدالة $f(x) = -2$



الشكل(3−4)

2) رسم الدالة: $y = ax + b$, حيث $a, b \in R$

هو خط مستقيم مائل

وتسمى بالدالة الخطية أو دالة الدرجة الأولى وهي دالة كثيرة الحدود مجالها R

مثال 11

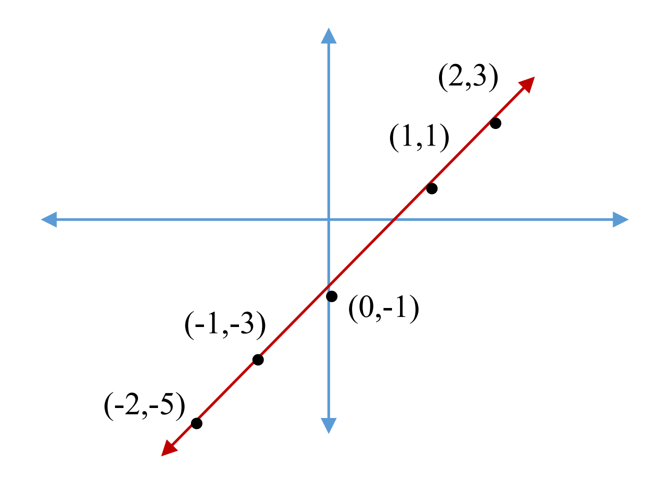
مثل بيانيا: $y = 2x - 1$

الحل

ننظم جدول بقيم $(x \text{ ، } y)$

x	$y = 2x - 1$	$(x \text{ ، } y)$
2	$y = 2(2) - 1 = 3$	$(2 \text{ ، } 3)$
1	$y = 2(1) - 1 = 1$	$(1 \text{ ، } 1)$
0	$y = 2(0) - 1 = -1$	$(0 \text{ ، } -1)$
-1	$y = 2(-1) - 1 = -3$	$(-1 \text{ ، } -3)$
-2	$y = 2(-2) - 1 = -5$	$(-2 \text{ ، } -5)$

نعين جميع النقاط ونرسم خط مستقيم مائل ويمر بهذه النقاط



3) رسم الدالة: $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a , b \in R$

وتسمى بالدالة التربيعية وهي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية مجالها R

لها حالتين:

أ) إذا كان معامل x^2 موجبا ففتحة المنحني تكون للأعلى.

ب) إذا كان معامل x^2 سالبا ففتحة المنحني تكون للأسفل.

مثال 12

مثل بيانيا الدالة: $y = x^2 + 1$

ننظم جدول بقيم (x , y)

x	$y=x^2+1$	$(x ، y)$
2	$y=(2)^2+1=5$	$(2 ، 5)$
1	$y=(1)^2+1=1$	$(1 ، 2)$
0	$y=(0)^2+1=1$	$(0 ، 1)$
-1	$y=(-1)^2+1=2$	$(-1 ، 2)$
-2	$y=(-2)^2+1=5$	$(-2 ، 5)$

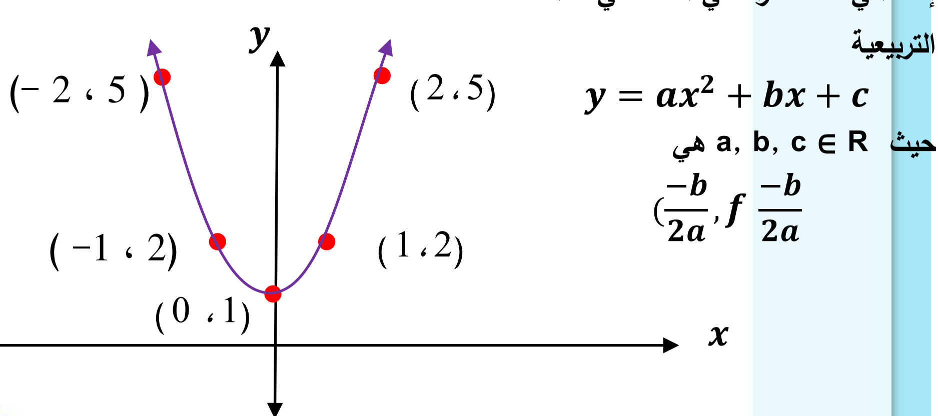
نعين جميع النقاط ونرسم خط مستقيم مائل ويمر بهذه النقاط

ملحوظة: إحداثي نقطة رأسي المنحني للدالة التربيعية

$y = ax^2 + bx + c$

حيث a, b, c ∈ R هي

$\left(\frac{-b}{2a}, f\frac{-b}{2a}\right)$



الشكل(5−4)

تمارين (1 -4)

س[1] جد أوسع مجال لكلاً مما يأتي:

1. $f(x) = 3 - 2x^3 + x$
2. $f(x) = \sqrt{x} - 2x + 1$
3. $f(x) = \sqrt{2 - 4x}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$
5. $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$

س[2] مثل بيانيا كلاً من الدوال الآتية:

1. $f(x) = -4$
2. $f(x) = 1 - 2x$
3. $f(x) = 5 - x^2$
4. $f(x) = 2x^2 - 3$

[4- 5] الغاية

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادرا على أن:
1) يعرف الغاية 2) يجد غاية الدالة

معنى الغاية:

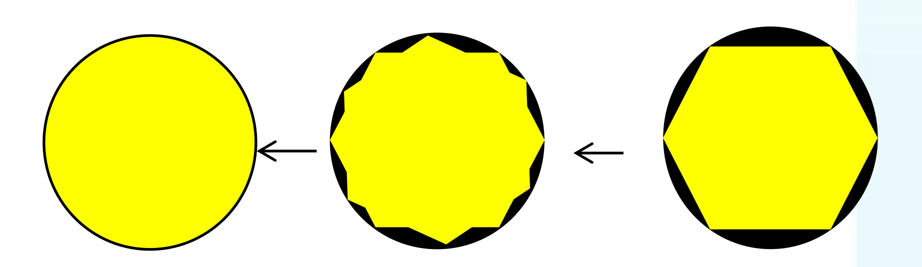
لغرض فهم الطالب لمعنى الغاية سنعطي المثال الاتي:

نرسم مضلع منتظم (عدد أضلاعه n) داخل دائرة رؤوسه على محيط الدائرة، عندما تزداد عدد أضلاع المضلع المنتظم فان مساحته تزداد وعندما تزداد عدد أضلاع المضلع المنتظم الى ان تصبح:

مساحة المضلع المنتظم = مساحة الدائرة

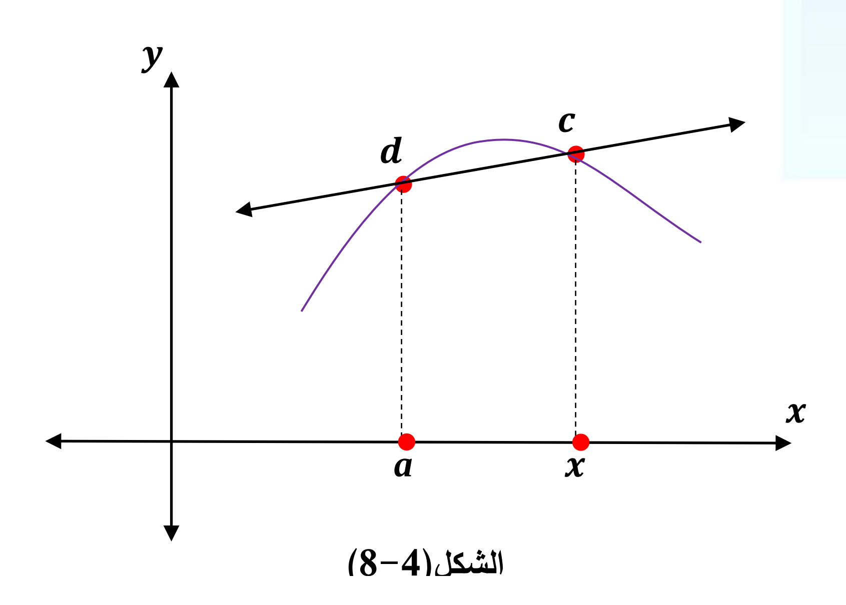
وعندها نقول غاية مساحة المضلع المنتظم = مساحة الدائرة عندما يقترب عدد أضلاع المضلع $n \leftarrow$

n عدد أضلاع المضلع المنتظم التي تجعل مس المضلع = مس الدائرة



الشكل(4−7)

التفسير الهندسي للغاية:



الشكل$(4-8)$

سندرس ماذا يطرأ على الخط لمستقيم الواصل بين النقطتين c ، d عندما تقترب x من a (أو بعبارة أخرى ماذا يحصل لميل المستقيم المار بالنقطتين c ، d عندما تقترب x من a)

ومن المهم أن نلاحظ أيضا أن $x \neq a$ خلال عملية تعيين النهاية اذ لو جعلنا $x = a$ وتصير $c = d$ وعندها يكون ميل المستقيم cd غير موجود وبعبارة رياضية:

$$m = \lim_{x \to a}(\text{ميل المستقيم } cd)$$

مثال 13

جد ناتج:

أ. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x}$

ب. $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$

الحل:

أ. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$

ب. $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=1$ كمية غير معرفة

الدالة لا تملك غاية عند $x=0$ (لا توجد غاية)

مثال 14

جد: $\lim_{x\to-3}(3x^2+2-1)$

الحل:

$$\lim_{x\to-3}(3x^2+2-1)=3(-3)^2+2(-3)-1$$

$$=27-6-1=20$$

مثال 15

جد: $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x-3}$

الحل:

إن ان أوسع مجال لهذه الدالة هو: $R-\{3\}$ لذلك نلجأ الى تحليل البسط الى فرق بين مربعين ثم الاختصار بعد ذلك التعويض بقيمة الغاية.

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}x+3=3+3=6$$

مثال 16

جد $\lim_{x\to4}\frac{(x-4)}{(\sqrt{x}-2)}$

الحل

ان أوسع مجال لهذه الدالة هو: $R-\{4\}$

لأن $x = 4$ يجعل مقام الدالة =0 وتصبح غير معرفة لذلك نلجأ الى تحليل البسط.

$$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)}{(\sqrt{x}-2)} = \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2) = (\sqrt{4}+2)$$

$$= 2+2 = 4$$

مثال 17

جد:

$$\lim_{x\to2}\sqrt{1-x}$$

الحل:

ان أوسع مجال لهذه الدالة هو: $\{x: x \le 1\}$

وإن $x = 2$

لا تنتمي لمجال الدالة لذلك ليس لها غاية عند $x = 2$

$\lim_{x\to2}\sqrt{1-x} = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$ غير حقيقي

مثال 18

إذا علمت أن:
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \forall\ x\geq 2 \\ x^2-1 & \forall\ x<2 \end{cases}$$

ابحث وجود الغاية عند $x=2$

الحل:

الغاية من جهة اليمين: $\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3=l_1$

الغاية من جهة اليسار: $\lim_{x\to 2}(x^2-1)=(2)^2-1=3=l_2$

$l_1=l_2$

الدالة $f(x)$ تملك غاية عندما $x=2$

مثال 19

إذا علمت أن:
$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & \forall\ x\geq -1 \\ 3x+2 & \forall\ x<-1 \end{cases}$$

جد:

1. $\lim_{x\to -2}(x)$
2. $\lim_{x\to -1}(x)$

الحل:

.1 $\lim_{x\to -2}(3x+2)=3(-2)+2=-4$

.2 الغاية من جهة اليمين:

$\lim_{x\to -1}(2x^2-3)=2(-1)^2-3=-1=l_1$

الغاية من جهة اليسار:

$\lim_{x\to -1}(3x+2)=3(-1)+2=-1=l_2$

$l_1=l_2$

الدالة $f(x)$ تملك غاية عندما $x=-1$

[6-4] الاستمرارية

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادرا على أن:
1) يذكر شروط الاستمرارية   2) يبحث في استمرارية الدالة

تكون الدالة د مستمرة (متصلة) عند (a) إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

1) a تنتمي الى مجال الدالة.

2) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة.

3) $\lim_{x\to a} f(x) = d(a)$

وإذا كانت د غير مستمرة (غير متصلة) عند $x = a$ نقول انها دالة غير مستمرة(منفصلة) عند x=a

مثال 20

ابحث في استمرارية الدالة عند $x = -3$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \forall \quad x \le -3 \\ 1 - 9x & \forall \quad x < -3 \end{cases}$$

الحل:

1. $f(x) = 3x^2 + 1 \to f(-3) = 3(-3)^2 + 1 = 28 = l_1$

2. $\lim_{x\to -3}(3x^2 + 1) = 3(-3)^2 + 1 = 28 = l_2$

$l_1 = l_2$ الغاية موجودة

الدالة مستمرة عند $x = -3$

مثال 21

ابحث في استمرارية الدالة: $f(x) = |x|$ عند $x = 0$

الحل:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{لكل } x \geq 0 \\ -x & \text{لكل } x < 0 \end{cases}$$

1. $f(x) = x \rightarrow f(0) = 0$

2. $\lim_{x\to 0}(x) = 0 = l_1$

$\lim_{x\to 0}(-x) = 0 = l_2$

$l_1 = l_2$ الدالة تملك غاية عند $x = 0$

الدالة مستمرة عند $x = 0$

نشاط

إذا علمت ان: $f(x) = |x + 1|$

أثبت أن الدالة مستمرة عند $x = -5$

تمارين(2-4)

س[1] جد الغاية (إن وجدت):

1. $\lim_{x\to 2}\left(3-\sqrt{2x}+1\right)$

2. $\lim_{x\to 4}\dfrac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\left(2-\sqrt{5-x}\right)}{x-1}$

4. $\lim_{x\to -3}\dfrac{2x^2-32}{x^3-64}$

س[2] إذا كانت:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\neq -3 \\ -1 & x=-3 \end{cases}$$

إبحث وجود الغاية عند $x=-3$

س[3] إذا علمت إن: $f(x)=|x+2|$

جد: $\lim_{x\to -2}(x)$

س[4] إبحث في استمرارية الدالة:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2}$$

عند $x=1$

س5 إبحث في استمرارية الدالة:

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & \forall \quad x\le 2\\ 2x+4 & \forall \quad x>2\end{cases}$$

عند $x=2$

س6 إبحث في استمرارية الدالة

$$f(x)=2x+6$$

عند $x=-3$

س7 إذا علمت أن الدالة:

$$f(x)=\begin{cases}3x+a & \forall \quad x\ge -1\\ x^2+b & \forall \, x>-1\end{cases}$$

مستمرة عند $x=-1$ ،

وكانت $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ جد: $a\,,b\ \in n$

4 -7] غايات الدوال الدائرية

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد غاية الدالة الدائرية

1) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

2) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

3) $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$

4) $\lim_{x\to 0} \cot x$ (كمية غير معرفة) لا توجد غاية

توضيح:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0}$$ كمية غير معرفة

5) $\lim_{x\to 0} \sec x = 1$

توضيح:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

6) $\lim_{x\to 0} \csc x$ لا توجد غاية (كمية غير معرفة)

توضيح : بما أن

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

اذن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 0} = \frac{1}{0}$$ كمية غير معرفة

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$

10) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

مثال 22

جد الغاية لكلاً من الدوال الاتية:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2\ 3x}{\mathrm{x}^2}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{tan^5\ 2x}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos^2\ 2x}{x^2}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{x \tan 5x}{1 - cos^2\ x}$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + sin\ 3x}{x + \sin 2x}$

الحل:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$=(3\times 1)(3\times 1)=9$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{tan^5 2x}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{tan\ 2x}\right)^5$$ نقسم والبسط المقام على x

$$=\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tan\ 2x}{x}}\right)^5=\left(\frac{1}{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{tan\ 2x}{2x}}\right)^5$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 2x}{x^2}$$

نعوض عن $sin^2 2x=(1-cos^2 2x)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2 2x}{x^2}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin\ 2x}{x}\right)^2$$

$$=(2\lim_{x\to 0}\frac{sin\ 2x}{2x})^2=(2\times 1)^2$$

$$=4$$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\tan 5x}{1-\cos^2 x}$ نقسم المقام والبسط على x^2

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\tan 5x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{x}}{(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x})^2}$$

$$= \frac{5\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 5x}{5x}}{(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x})^2} = \frac{5\times 1}{1^2} = 5$$

5) نقسم البسط والمقام على x

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan x + \sin 3x}{x}}{\frac{x+\sin 2x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} + 3\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{1 + 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3+1}{1+2}$$

$$= \frac{4}{3}$$

نشاط

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\tan^2 2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

تمارين (4-3)

جد الغاية (إن وجدت) لكلاً مما يأتي:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \csc^2 3x$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + x\sin 3x}{x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x + 3\sin 2x}{\tan 2x + \tan x}$

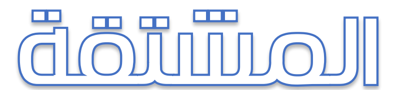
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x - \mathrm{x}\sin x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x\tan 2x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x^2}{sin^2 x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

الوحدة الخامسة





الهدف من دراسة الوحدة

ينبغي بعد دراسة الوحدة الخامسة أن يكون الطالب قادراً على أن:

1) يعرف المشتقة

2) يشتق الدالة

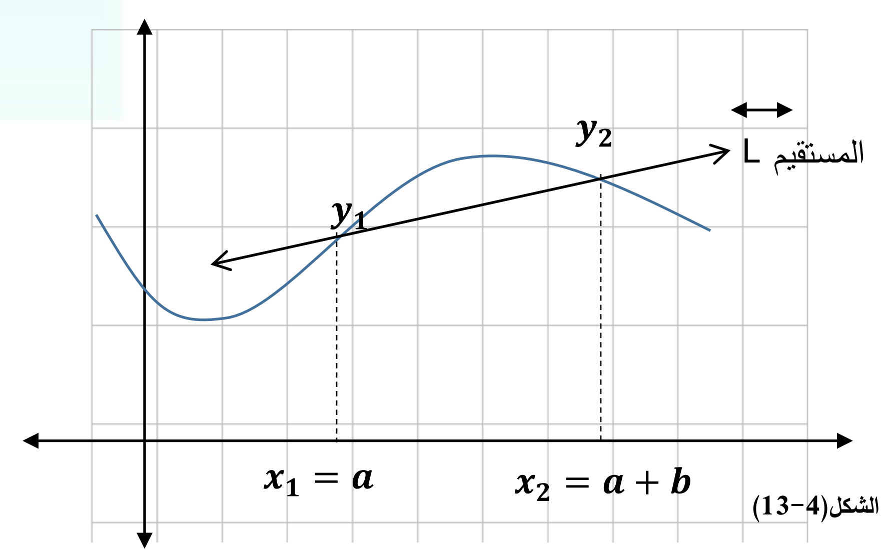
3) يحل تطبيقات هندسية وفيزيائية على المشتقة

مفردات الوحدة الخامسة

[5 -1] تعريف المشتقة وقواعد المشتقة
[5 -2] مشتقة الدوال المركبة وقاعدة السلسلة
[5 -3] الدوال المتداخلة
[5 -4] معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني
[5 -5] مشتقة الدوال الدائرية
[5 -6] مشتقة اللوغاريتم الطبيعي

[1- 5] تعريف المشتقة

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادرا على أن:
1) يعرف المشتقة 2) يجد ميل المستقيم 3) يجد السرعة



الشكل(4−13)

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على فترة مفتوحة وإذا كان a أي عدد فان ميل المماس لمنحني الدالة $f(x)$ عند النقطة $(x_1 ، y_1)$ هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_2)}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه الغاية موجودة

ملاحظة: تسمى هذه الطريقة ايجاد المشتقة باستخدام التعريف

مثال 1

جد ميل المماس لمنحني الدالة $y = x^2$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$m = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$m = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

نستخرج Δx عامل مشترك

$$m = 2x + 0 = 2x$$

مثال 2

جد المشتقة باستخدام التعريف للدالة: $f(n) = n^2 - 6n$

الحل:

$$f'(n) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta(n+\Delta n) - \Delta(n)}{\Delta n}$$

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(n+\Delta n)^2 - 6(n+\Delta n) - (n^2 - 6n)}{\Delta n}$$

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{2n\,\Delta n + (\Delta n)^2 - 6\Delta n}{\Delta n}$$

$$= \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta n(2n + \Delta n - 6)}{\Delta n} = 2n + 0 - 6$$

$$= 2n - 6$$

ملاحظة

إن طريقة الاشتقاق باستخدام التعريف قد تتعب الطالب وقد تستغرق وقتاً طويلاً فلابد من وجود قواعد تسهل عملية الاشتقاق.

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن:
يشتق الدالة باستخدام قواعد المشتقة

أولاً

إذا كان a ثابت $y = a$ فان $\grave{y} = 0$

ثانياً

مشتقة $y = ax \rightarrow \grave{y} = a$

ثالثاً

$y = x^n \quad \Rightarrow \grave{y} = n\, x^{n-1}$

رابعاً

مشتقة الرفع:

$$y = (g(x))^n \Rightarrow \grave{y} = n\big(g(x)\big)^{n-1} . \grave{g}(x)$$

خامساً مشتقة ضرب دالتين :

$$y = f(x). g(x) \Rightarrow \grave{y} = f(x). \grave{g}(x) + g(x). \grave{f}(x)$$

سادساً مشتقة الدالة الكسرية

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \grave{y} = \frac{\grave{f}(x). g(x) - f(x). \grave{g}(x)}{g(x)^2}$$

مثال 3

جد $\grave{y}$ لكلاً مما يأتي:

1. $\mathbf{y = 3}$
2. $\mathbf{y = -8}$
3. $\mathbf{y = 2x}$
4. $\mathbf{y = -9x}$
5. $\mathbf{f(x) = x^2}$
6. $\boldsymbol{f(x) = 7x^5}$

الحل

1. $\grave{y} = 0$
2. $\grave{y} = 0$
3. $\grave{y} = 2$
4. $\grave{y} = -9$
5. $\grave{f}(x) = 3x^2$
6. $\grave{f}(x) = 35x^4$

مثال 4

جد $\frac{dy}{dx}$ لكلاً مما يلي:

. $y = x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

2. $y = (x^2 - 4x + 5)^3$

3. $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x +}$

4. $y = (x^2 + 3x)(5x + \quad)$

5. $y = \dfrac{3x + 5}{x^2 + 2}$

الحل :

1. $\grave{y} = 3x^2 + 6x + 5$

2. $\grave{y} = 3(x^2 - 4x + 5)^2$

3. $y = (x^2 + 3x + 1)^{\frac{1}{3}}$

$$\grave{y} = \frac{1}{3}(x^2 + 3x + 1)^{\frac{-2}{3}}(2x + 3)$$

$$= \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 1)^2}}$$

4. $\grave{y} = (x^2 + 3x) \times 5 + (5x + 1) \times (2x + 3)$

$$\grave{y} = 5x^2 + 15x + 10x^2 + 15x + 2x + 3$$

$$\grave{y} = 15x^2 + 32x + 3$$

5. $\grave{y} = \dfrac{(x^2 + 2) - 2x(3x + 5)}{(x^2 + 2)^2}$

$$\grave{y} = \frac{3x^2 + 6 - 6x^2 - 10x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\grave{y} = \frac{-3x^2 - 10x + 6}{(x^2 + 2)^2}$$

مثال 5

جد $\grave{f}(x)$ ، للدالة: $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

الحل

يمكن كتابة الدالة بالشكل:

$$f(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)} = \sqrt{x^2 - x^4}$$

$$f(x) = (x^4 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\grave{f}(x) = \frac{}{2}(x^4 - x^2)^{\frac{-1}{2}}(4x^2 - 2x)$$

$$= \frac{4x^2 - 2}{2\sqrt{(x^4 - x^2)}}$$

تمارين (5-1)

جد المشتقة لكلاً من الدوال الآتية:

. $f(x) = \sqrt{1 - 2x^2}$

2. $f(x) = 4x(3x - 2)^2$

3. $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

4. $y = \dfrac{2x}{(x - 5)^2}$

[3- 5] مشتقة الدالة المركبة

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن:
يركب دالتين ثم يشتق الدالة المركبة

إذا كانت $g(x)$ دالة و $f(x)$ دالة ثانية فإن:

$$(f \circ g)_{(x)} = g(f(x))$$

مثال 6

إذا كانت $g(x) = x^3 + 5$ ، $f(x) = 2x + 1$

جد:

1. $(f \circ g)\grave{}_{(2)}$
2. $(f \circ g)\grave{}_{(-1)}$

الحل:

1. $(f \circ g)_{(x)} = g(f(x))$

$(f \circ g)_{(x)} = (2x+1)^3 + 5$

$(f \circ g)\grave{}_{(x)} = 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$

$(f \circ g)\grave{}_{(2)} = 6(2 \times 2 + 1)^2 = 6 \times 25 = 150$

2. $(f \circ g)_{(x)} = g(f(x))$

$(f \circ g)_{(x)} = 2(x^3 + 5) + 1$

$(f \circ g)_{(x)} = 2x^3 + 10 + 1$

$(f \circ g)\grave{}_{(x)} = 6x^2$

$(f \circ g)\grave{}_{(-1)} = 6(-1)^2 = 6$

قاعدة السلسلة

الحالة الاولى:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dn}\times\frac{dn}{dx}$$

الحالة الثانية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dn}\div\frac{dx}{dn}$$

$$y=n^3+6 \quad , \quad n=5x+2$$

جد: $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dn}\times\frac{dn}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=(3g^2)\times(5)=15n^2$$

نعوض $n=5x+2$

$$\frac{dy}{dx}=15(5x+2)^2$$

مثال8

$$y = n^3 + 2n + 3 \quad , \quad x = 4n^2 - 5$$

جد: $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

$$\frac{dy}{dx} = (3n^2 + 2) \div (8n) = \frac{3n^2 + 2}{8n}$$

نشاط

1. إذا علمت ان:

$$y = n^2 + 3n \quad , \quad x = 2n - 1$$

جد: $\frac{dy}{dx}$ عندما ن = −2

2. $y = 5n^2 + 3 \quad , \quad n = \frac{2}{x}$

جد: $\frac{dy}{dx}$

[5 -4] الدوال الصريحة والدوال الضمنية (المتداخلة)

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن:
1) يميز بين الدالة الصريحة و الدالة الضمنية
2) يشتق الدالة الضمنية

الدالة الصريحة :

يقال بأن الدالة صريحة إذا أمكن التعبير عن المتغير y مباشرة بدلالة متغير اخر x فيسمى المتغير x دالة صريحة والامثلة على ذلك ما يلي:

$$y = x^3 - 3x + 2 \quad , \quad y = \frac{2x +}{3x - 2} \quad , \quad y = \sin 3x$$

الدالة الضمنية (المتداخلة):

إذا لم نستطع التعبير عن المتغير y بدلالة المتغير x مباشرة، ففي هذه الحالة تكون الدالة ضمنية ، والامثلة على ذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{x^2 + x^2y + 2y^3 = 0 \quad , \quad y^3 + yx^2 - 2yx = 0}$$

خطوات الاشتقاق الضمني

1- نشتق
2- نبسط (إن وجد تبسيط) .
3- نجعل الحدود التي تحوي $\acute{y}$ في جهة اليمين والحدود التي لا تحوي $\acute{y}$ جهة اليسار
4- $\acute{y}$ عامل مشترك .
5- نجد $\acute{y}$

مثال9

جد $\grave{y}$ إذا علمت أن:

$$\mathbf{3x\,y + 4y^2 = 10}$$

الحل:

$$3x \times \grave{y} + y \times 3 + 8y\,\grave{y} = 0$$

$$3x\,\grave{y} + 3y + 8y\,\grave{y} = 0$$

ننقل الحدود الخالية من $\grave{y}$ إلى جهة اليسار ونبقي الحدود التي تحوي $\grave{y}$ في جهة اليمين:

$$3x\,\grave{y} + 8y\,\grave{y} = -3y$$

نستخرج y' عامل مشترك

$$\grave{y} = (3x + 8y) = -3y \rightarrow \grave{y} = \frac{-3y}{3x + 8y}$$

مثال10

جد $\grave{y}$ للدالة: $\mathbf{x^2 + x^2\,y + 2y^3 = 4}$

الحل:

$$2x + x^2 \times \grave{y} + y \times 2x + 6y^2\,\grave{y} = 0$$

$$2x + x^2\,\grave{y} + 2y\,x + 6y^2\,\grave{y} = 0$$

$$x^2\,\grave{y} + 6y^2\,\grave{y} = -2x - 2y\,x$$

$$\grave{y}(x^2 - 6y^2) = -2x - 2y\,x \rightarrow \grave{y} = \frac{-2x - 2y\,x}{x^2 + 6y^2}$$

[5-5] معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني

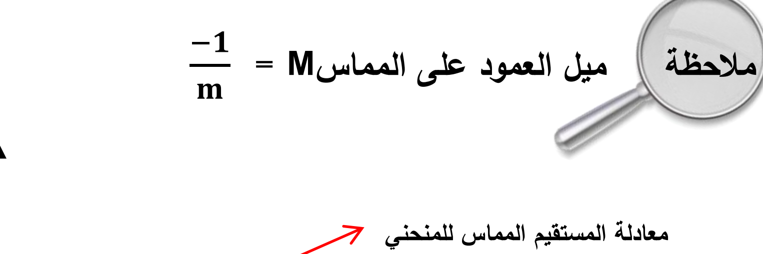
الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد معادلة المماس ومعادلة العمود على المماس

لإيجاد معادلة المماس لمنحني ما

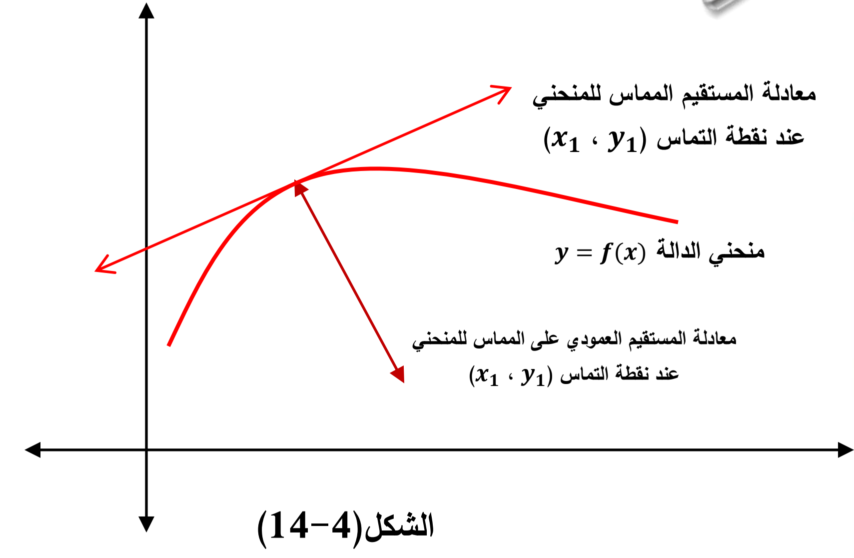
1) نحتاج نقطة التماس (x_1 , y_1)

2) نحتاج ميل المنحني عند نقطة التماس حيث أن الميل $m = \acute{y}$

3) معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$



ميل العمود على المماس $M = \frac{-1}{m}$



الشكل(4-14)

مثال11

جد معادلة المماس للمنحني:

$\boldsymbol{x^3 + y^3 = 5x\,y - 1}$ **(1 , 2)** عند النقطة

الحل

نجد ميل المنحني بطريقة الاشتقاق الضمني

$3x^2 + 3y^2\,\grave{y} = (5x)(\grave{y}) + (y)(5)$

$3y^2\grave{y} - 5x\,\grave{y} = 5y - 3x^2$

$\grave{y}(3y^2 - 5x) = 5y - 3x^2$

$\grave{y} = \dfrac{5y - 3x^2}{3y^2 - 5x} = \dfrac{5(1) - 3(2)^2}{3(1)^2 - 5(2)} = 1$ ميل المنحني

معادلة المماس: $\boldsymbol{m(x - x_1) = y - y_1}$

معادلة المماس: $y - 1 = 1(x - 2) \rightarrow x - y - 1 = 0$

تمارين (5-2)

س1 إذا كان: $y = 2n^2 - n \ , \ n = x^2 + 1$

جد: $\frac{dy}{dx}$

س2 $g(x) = x^2 + 1 \ , \ h(x) = 1 - 2x$

جد: $(h \circ g)'_{(x)} \ , \ (h \circ g)'_{(1)}$

س3 إذا كانت: $f(x) = x^2 + 7 \ , \ h(x) = \sqrt{x}$

جد: $(h \circ f)'_{(3)}$

س4 إذا علمت أن: $x = 3n^2 + 3n - 1 \ , \ y = n^2 + 3n - 2$

جد معادلة المماس عند $n = 1$

س5 إذا علمت أن: $f(x) = x^2 + 2x + 1 \ , \ g(x) = \sqrt{x}$

جد معادلة المماس للدالة: $(g \circ f)_{(x)}$ عند $n = 1$

س6 إذا علمت ان: $y = x^2 + 2x \ , \ x = 2n + 3$

جد معادلة المماس عندما $n = 1$

س7 جد معادلة العمود على المماس للمنحني:

$2x^3 - x^2 y + y^3 - 1 = 0$ عند $(2 , -3)$

س8 جد معادلة مماسي المنحني: $x^2 + 16y^2 = 17$ عند $y = 1$

س9 جد نقطة ∋ للمنحني $(1 + y)^3 = 8x$ والتي عندها ميل العمود عليه يساوي $(\frac{1}{3})$

[6- 5] مشتقات الدوال الدائرية (المثلثية)

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن: يشتق الدالة الدائرية

1) $y = \sin g(x) \rightarrow y' = \cos g(x) \, . \, g'(x)$

2) $y = \cos g(x) \rightarrow y' = -\sin g(x) \, . g'(x)$

3) $y = \tan g(x) \rightarrow y' = \sec^2 g(x) \, . g'(x)$

4) $y = \cot g(x) \rightarrow y' = -\csc^2 g(x) \, . g'(x)$

5) $y = \sec g(x) \rightarrow y' = \sec g(x) \tan g(x) . g'(x)$

6) $y = \csc g(x) \rightarrow y' = -\csc g(x) \cot g(x) . g'(x)$

مثال12

جد $\acute{y}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $y = \sin(x^2 + 3)$
2. $y = \cos x^2$
3. $y = \tan 3x$
4. $y = \cot(x^2 - 2x + 4)$
5. $y = \sec 2x$
6. $y = \csc 7x$

الحل:

1. $\grave{y} = 2x\cos(x^2+3)$
2. $\grave{y} = -3\,x^2\ \sin x^3$
3. $\grave{y} = 3\sec^2 3x$
4. $\grave{y} = -(2x-2)\csc^2(x^2-2x+4)$
5. $\grave{y} = 2\sec 2x\ \tan 2x$
6. $\grave{y} = -7\csc 7x\ \cot 7x$

ملاحظات مهمة في اشتقاق بعض الدوال الدائرية

ملاحظة 1

إذا كانت الدالة مرفوعة للأس نضع الدالة داخل قوس مرفوع للأس ثم نطبق القاعدة:

$$y = (\sin g(x))^n \Longrightarrow \grave{y} = n(\sin g(x))^{n-1}\,.\cos g(x).\grave{g}(x)$$

مثال13

جد $y`$

$$y = \sin x^3 5x$$

الحل:

$$\grave{y} = 3(\sin 5x)^2 \times \cos 5x \times 5) = 15\sin^2 5x\cos 5x$$

ملاحظة 2

إذا كانت الدالة كسرية نطبق القاعدة:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \grave{y} = \frac{\grave{f}(x).g(x) - f(x).\grave{g}(x)}{g(x)^2}$$

مثال14

جد $\grave{y}$ للدالة:

$$y = \frac{3}{1 - \tan x}$$

الحل

$$\grave{y} = \frac{(0)(1 - \tan x) - 3(\sec^2 x)}{(1 - \tan x)^2} = \frac{3\sec^2 x}{(1 - \tan x)^2}$$

ملا حظة 3

ضرب دالتين نستخدم القاعدة:

$$y = f(x).g(x) \Rightarrow \grave{y} = f(x).\grave{g}(x) + g(x).\grave{f}(x)$$

مثال15

جد $\grave{y}$ للدالة $y = \tan x \ \csc x$

الحل:

$$\grave{y} = \tan x \times (-\csc x \ \cot x \times 1) + \csc x \ \times \sec^2 x \times 1$$

$$\grave{y} = -\tan x \ \csc x \ \cot x + \csc x \ \sec^2 x$$

ملاحظة 4

هناك أسئلة تحتاج إلى تبسيط وذلك بالإعتماد على المتطابقات المثلثية التي درستها في الفصول السابقة وسنذكر بعضها للفائدة:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

   $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

   $\cos^2 x = 1 - \sin^2$

2. $\sin 2x = 2\sin x \ \cos x$

3. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ومنها نحصل على ←

   $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

   $\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$

4. $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

5. $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$

6. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $cscx = \dfrac{1}{\sin x}$

   $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

مثال16

إذا علمت أن: $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

أثبت أن: $\grave{y} = -2\sin 2x$

الحل

$$y = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$y = (\cos 2x)(1)$$

$$y = \cos 2x$$

$$\grave{y} = -2\sin 2x$$

مثال17

إذا علمت أن: $y = \tan x$ فاثبت ان:

$$\grave{\grave{y}} = 2\tan x \sec^2 x$$

الحل:

$$\grave{y} = \sec^2 x \rightarrow \grave{\grave{y}} = 2\sec x\ \sec x\ \tan x$$

$$= 2\sec^2 x \tan x$$

مثال18

إذا علمت أن: $y = \sqrt{2\cos 2x + 2}$ فاثبت ان:

$$\grave{\grave{y}} = -2\cos x$$

الحل:

$$y = \sqrt{2(2\cos^2 x - 1) + 2} = \sqrt{4\cos^2 x - 2 + 2}$$

$$y = \sqrt{4\cos^2 x} \rightarrow y = 2\cos x$$

$$\grave{y} = -2\sin x \rightarrow \grave{\grave{y}} = -2\cos x$$

[5 -7] تطبيقات هندسية على مشتقة الدوال الدائرية

معادلة المماس والعمود على المماس على منحني الدالة الدائرية

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن:
يجد معادلة المماس و العمود على المماس للدالة الدائرية

مثال19

جد معادلة المماس للدالة: $y = \cos 9x$ **عند** $x = \frac{\pi}{6}$

الحل:

$$x = \frac{\pi}{6} \to y = \cos(9 \times \frac{\pi}{6}) = \cos 270° = 0$$

نقطة التماس:

$$(x_1 , y_1) = (\frac{\pi}{6} , 0)$$

$$m = \acute{y} = -9 \sin 9x = -9 \sin(9 \times \frac{\pi}{6})$$

$$= -9(- \quad) = 9$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 9\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \to 9x - y - \frac{3\pi}{2} = 0$$

ويمكن تسهيل المعادلة وذلك بضرب الطرفين بالعدد 2

$$18x - 2y - 3\pi = 0$$

مثال20

جد معادلة المماس والعمود على المماس للدالة:

$f(x) = \tan 2x + \cos x$ عند $x = 0$

الحل

نجد نقطة التماس

$$x = 0 \rightarrow y = \tan 2(0) + \cos 0 = 0 + 1 = 1 \rightarrow (0\,,1)$$

نجد ميل المماس: $\grave{y} = 2\sec^2 2x - \sin x = 2\sec^2 0 - \sin 0$

$$m = 2 - 0 = 2$$

معادلة المماس:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 0) \rightarrow 2x - y + 1 = 0$$

لإيجاد معادلة العمود على المماس نحتاج ميل العمود = $\frac{-1}{m}$

$$M = -\frac{1}{2}$$

معادلة العمود على المماس

$$y - y_1 = M\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \rightarrow x + 2y - 2 = 0$$

[5 -8] التطبيقات الفيزياوية على مشتقات الدوال الدائرية

البعد ، الموضع ، الإزاحة = $s(t)$

الســـــــرعة= $v(t)$

التعـــجـــيل = $a(t)$

مثال21

إذا كانت s تمثل إزاحة جسم يتحرك على خط مستقيم حيث:

s ← بالأمتار، t ← الزمن بالثواني وان $s(t) = 2\sin 3t$ جد

البعد والسرعة والتعجيل عندما:

$$t = \frac{\pi}{18}$$

الحل

$$s(t) = 2\sin 3t = 2\sin 3t$$

$$= 2\sin 3 \times \frac{\pi}{18}$$

$$= 2 \times \frac{\ }{2} = \quad \text{m}$$

$$v(t) = 6\cos 3t$$

$$= 6\cos 3 \times \frac{\pi}{18} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3} \quad \text{m|s}$$

$$a(t) = -18\sin 3t$$

$$= -18\sin 3 \times \frac{\pi}{18}$$

$$= -9\,\pi\ m/s^2$$

تمارين (5-3)

س1 جد $\acute{y}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $y = \cos(2 - 3x^2)$
2. $y = \sqrt{\sec^2 x + 1}$
3. $y = \sec \pi \ x^2$
4. $y = \cos^2(\pi + x) - \sin^2(\pi + x)$
5. $y = 2\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$
6. $y = x\tan^2 x$

س2 جد معادلة المماس للدالة: $f(x) = \sin 2x - \cos 4x$
عند $x = \frac{\pi}{18}$

س3 جسم يتحرك بسرعة:

$$v(t) = \sin\frac{\pi}{4}t = \cos\frac{\pi}{4}t$$

حيث أن $v(t)$ سرعة الجسم بوحدة m/s ، t الزمن بالثواني
جد: 1) سرعة الجسم عندما $t = 2\ s$
2) تعجيل الجسم عندما $t = 8\ s$

[5-9] مشتقة اللوغرتيم الطبيعي رمزه (Ln)

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن:
يشتق دالة اللوغاريتم الطبيعي

درست عزيزي الطالب في الفصل الدراسي الأول اللوغاريتمات ودرست نوعا خاصا من اللوغاريتمات ألا وهو اللوغاريتم الطبيعي الذي سنختص في هذا الفصل بطريقة اشتقاقه.

قاعدة اشتقاق اللوغاريتم الطبيعي ln

إذا كانت: $y = \ln f(t)$

فان:

$$\grave{y} = \frac{1}{f(t)} \times \grave{f}(t)$$

مثال22

جد 'y لكل من الدوال الآتية:

1. $y = \ln(x^2 + 3)$
2. $y = \ln(x^3 - 3x + \ \ )$
3. $y = \ln(\tan x + \sin x)$
4. $y = \ln(\cos^3 x)$

الحل:

1. $\acute{f} = \frac{1}{x^2+3} \times (2x) = \frac{2x}{x^2+3}$

2. $\acute{f} = \frac{1}{x^3-3x+1} \times (3x^2-3) = \frac{3x^2-3}{x^3-3x+1}$

3. $\acute{f} = \frac{1}{\tan x + \sin x} \times (\sec^2 x + \cos x)$

$$= \frac{\sec^2 x + \cos x}{\tan x + \sin x}$$

4. $\acute{f} = 3 \ln \cos x \to \acute{f} = 3\frac{1}{\cos x} \times (-\sin x)$

$$= \frac{-3 \sin x}{\cos x} = -3 \tan x$$

[10– 5] مشتقة الدالة الأسية $y = a^x$

الهدف من الدرس أن يكون الطالب قادرا على أن:
يشتق الدالة الأسية

$$y = a^{g(x)} \Longrightarrow \acute{y} = \acute{g}(x). \ln a . a^{g(x)}$$

مثال23

جد $\acute{y}$ لكلاً مما يأتي:

1. $y = 3x^{2x+1}$
2. $y = 5^{\sin x}$
3. $y = 2^{\cot x+1}$

الحل:

1. $\acute{y} = (2)(\ln 3)(3^{2x+1})$
2. $\acute{y} = \cos x \times \ln 5 \times 5^{\sin x}$
3. $\acute{y} = -\csc^2 x \times \ln 2 \times 2^{\cot x+1}$

مشتقة $y = e^x$

$$y = e^{g(x)} \Rightarrow \acute{y} = \acute{g}(x).e^{g(x)}$$

مثال24

جد $\acute{y}$ لكلاً مما يأتي:

a. $y = e^{3x+5}$

b. $y = e^{\sin x+\tan x-1}$

c. $y = e^{3x^2-3x+1}$

الحل:

a. $\acute{y} = 3 \times e^{3x+5}$

b. $\acute{y} = (\cos x + \sec^2 x)e^{\sin x+\tan x-1}$

c. $\acute{y} = (6x-3)e^{3x^2-3x+1}$

تمارين (4-5)

س1 جد: $\frac{d^2y}{dx^2}$

للدوال:

1. $y = e^{3x+1}$
2. $y = e^{3\sin x}$

س2 جد المشتقة لكلاً مما يأتي:

A. $f(x) = \ln(3x^2 + 1) + \ln(2x^3 + 1)$

B. $f(x) = (\ln\cos x)^3 + 2x$

c. $f(x) = \ln e^{3x} + 2^{3x+1}$

D. $f(x) = (e^{3x} - 1)^3$

E. $f(x) = \ln(\frac{1}{\cot x})$


تمت بحمد الله